
BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
J. Mich. Söckler. sc. 1779.

~~Phil. math.~~ 2698. a.

4° Math Un 112

Mathesis. Opera varia mathesin illustrantia 91.

R

Sehr

leichte und kurze

Entwickelung

einiger

der wichtigsten mathematischen

Theorien

von

Johann Schulz,

Königlicher Hofprediger und Professor der Mathematik.

Königsberg,

bey Friedrich Nicolovius,

1803.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Excellenz

dem

Königl. Preussischen Staats- und Justiz-Minister, Chef des geistlichen Departements, Obercurator der Königl. Universitäten etc.

Herrn von Massow.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Hochgebohrner Herr,

Hochgebietender Herr Geheimer Staats- und Justiz-Minister,

Gnädiger Herr!

Ew. Excellenz besitzen auf Dero erhabenem Standorte nicht nur die Macht, der Beschützer und Beförderer der Wissenschaften zu seyn, sondern nehmen an der Vervollkommnung und Verbreitung derselben einen so lebhaften persönlichen Antheil, daſs jede hierauf abzweckende Bemühung als eine Beförderung Ihres eigenen Interesse anzusehen ist.

In dieser Hinsicht erkühne ich mich, Ew. Excellenz gegenwärtige Schrift ehrerbietigst zu widmen, um so mehr, da ich kein anderes Mittel weiſs, meine Dankbarkeit für das gnädige Zutrauen, womit Ew. Excellenz mich in Ansehung meiner wissenschaftlichen Bemühungen bisher zu beehren geruht haben, öffentlich an den Tag zu legen.

Ew. Excellenz hoher Beyfall und gnädiges Wohlwollen wird vorzüglich zur Erhaltung der Gemüthsheiterkeit beytragen, die mir bey den Beschwerden, die mein Alter drücken, nothwendig ist, wenn ich meine übrigen mathematischen und philosophischen Untersuchungen, die ich noch dem Publico mitzutheilen wünsche, nicht mit mir ins Grab nehmen soll.

Ehrfurchts- und vertrauensvoll empfehle ich daher Ew. Excellenz Schutz und Gnade mich und meine fernern Angelegenheiten, und ersterbe in tiefster Submission

Ew. Excellenz

Königsberg,
den 25sten October, 1803.

unterthänigst gehorsamster Diener
Johann Schulz.

Vorrede.

Die Mathematik, die wegen der Menge von verschiedenen Disciplinen, welche sie unter sich begreift, schon an sich von so außerordentlichem Umfange, und bereits von den frühesten Zeiten des Alterthums her mit bewundernswürdiger Sorgfalt bearbeitet worden ist, hat besonders seit Erfindung der höhern Analysis eine solche Erweiterung erhalten, daſs kaum mehr ein Menschenleben hinreichend ist, sich mit dem, was in derselben bereits erfunden worden, auch nur gehörig bekannt zu machen. Hiezu kommt noch, daſs einestheils die wichtigsten und unentbehrlichsten Theorien erst in der Differential- und Integral-Rechnung vorgetragen werden, und daher denjenigen, die sich zu diesem höchsten Gipfel der Mathematik nicht aufschwingen können, gänzlich verborgen bleiben, anderntheils aber, wenn sie auch schon in der gemeinen Analysis vorkommen, so schwierig, verwickelt und weitläuftig sind, daſs oft auch gute Köpfe den Muth und die Geduld verlieren, sich durch alle diese Verwickelungen mit derjenigen Anstrengung hindurch zu arbeiten, welche nöthig ist, um sich von ihnen eine helle, deutliche Einsicht zu erwerben.

Das Bedürfniſs, dem Anfänger den Zugang zu den köstlichen Schätzen der Mathematik, jedoch ohne dabey der strengsten Gründlichkeit das mindeste zu vergeben, nicht nur überhaupt aufs möglichste zu erleichtern, sondern auch die nöthigsten und schwierigsten Theorien der Analysis, nach synthetischer Methode demonstrirt, ihm schon in der allgemeinen Elementarmathematik faſslich zu machen, wird daher immer gröſser. Diesem Bedürfniſs auch nach meinen geringen Kräften so viel möglich abzuhelfen, war schon das Hauptziel, das ich mir in meinen Anfangsgründen der reinen Mathesis, und nachher für den ersten Cursus in dem kürzer gefaſsten Lehrbegriffe derselben setzte. Allein es blieb mir doch immer unangenehm, daſs ich in dem erstgenannten gröſsern Lehrbuch die Lehren von den *Potenzen*, den *Logarithmen*, und den *Kettenbrüchen*, nicht in ihrer völligen *Allgemeinheit* vortragen konnte, da sie doch, in dieser Allgemeinheit genommen, offenbar in die allgemeine *Elementararithmetik* gehören. Nach mehreren Versuchen gelang es mir endlich, auch hier zu meinem Ziel zu kommen, und zwar in Rücksicht der beyden erstern Lehren auf so bequemen Wegen, als ich es kaum erwarten konnte. Auf diese Art entstanden die *vier ersten* Abhandlungen meiner gegenwärtigen Schrift.

Die Theorie der *Logarithmen*, die *analytische* Auflösung des *polynomischen Problems*, und der *synthetische Beweis* des *binomischen* und *polynomischen* Lehrsatzes, welche den Inhalt der drey ersten Abhandlungen ausmachen, sind so leicht und kurz, als man sie nur wünschen kann.

Die *allgemeine* Theorie der *Kettenbrüche* kann vielleicht noch etwas leichter und vollständiger abgefaſst werden, und ich getrauete

mir, wenn ich dazu Zeit hätte, dieses fast selbst zu bewerkstelligen. Allein auch so, wie sie hier zum erstenmal erscheint, kann sie dem Anfänger keine Mühe machen. Ich habe hier wenigstens die Bahn brechen wollen, um, wo nöthig, zu einer noch vollständigern Bearbeitung dieser wichtigen Theorie aufzumuntern, die, ausser der in der *fünften* Abhandlung angezeigten bequemen Methode, die Tangenten zu berechnen, vielleicht noch manche andere vortheilhafte Rechnungsmethoden liefern wird.

Ein Hauptzweck, der mich anfeuerte, gedachte Theorie der Kettenbrüche in ihrer Allgemeinheit darzustellen, war mit dieser, um mich in den Stand zu setzen, das *Irrationalverhältniſs der Kreislinie zum Durchmesser* ein für allemal vollkommen auſser Zweifel zu setzen, indem ich fand, daſs auch der *Lambertsche* Beweis hievon, aus Mangel der Allgemeinheit jener Theorie, fehlerhaft ausgefallen war. Es war doch für den Mathematiker immer eine unangenehme Sache, den sogenannten Cirkelquadrirern, welche das Verhältniſs des Durchmessers zur Peripherie des Kreises durch einen rationalen Bruch angeben zu können glauben, nicht *mit völliger Ueberzeugung* sagen zu können, daſs ihr Unternehmen lächerlich sey, weil es *unmöglich* ist. Nunmehr ist dieses in meiner *fünften* Abhandlung aufs bündigste auſser allen Zweifel gesetzt worden. Ein würdiger Freund legte mir unlängst den Zweifel vor, daſs Brüche, deren Zähler und Nenner auch, nachdem sie schon durch den gröſsesten gemeinschaftlichen Theiler dividirt worden, unendlich bleiben, dennoch Rationalbrüche seyn könnten, indem z. B. der Bruch $\frac{333333\ldots}{1000000\ldots}$, dessen Zähler unendlich viele 3, und dessen Nenner eine Eins mit unendlich vielen Nullen enthält, dennoch $= \frac{1}{3}$ ist, *obgleich Zähler und Nenner*

keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Allein dieser Zweifel läſst sich schon sogleich κατ' ανθρωπον heben. Denn wenn man behauptet, daſs $\frac{333333\ldots}{1000000\ldots} = \frac{1}{3}$ sey; so muſs man auch behaupten, daſs $\frac{1000000\ldots}{333333\ldots} = 3$, folglich der Zähler 333333... des gegebenen Bruchs nicht nur ein Theiler von sich selbst, sondern auch vom Nenner 1000000... ist, mithin die Behauptung, daſs beyde keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, sich selbst widerspricht. Man kann aber letzteres auch *geradezu* beweisen. Denn wenn man 1000000... durch 3 dividirt; so ist der Quotient ohne Ende fort eine Menge von lauter 3, nämlich 333333... Hörte nun derselbe bey irgend einer letzten 3 auf; so käme, da bey der Division immer der Rest 1 bleibt zum Quotienten noch der Bruch $\frac{1}{3}$ hinzu. Soll hingegen die Menge von 3 bey keiner 3 aufhören, sondern unendlich groſs seyn, so will man eben hiedurch, daſs bey der Division kein Rest 1 bleiben, folglich auch kein Bruch $\frac{1}{3}$ zum Quotienten hinzukommen soll, folglich ist genau $\frac{1000000\ldots}{3} = 333333\cdots$, mithin auch genau $\frac{1000000\ldots}{333333\ldots} = 3$, also der Zähler des gegebenen Bruchs allerdings ein gemeinschaftlicher Theiler von ihm selbst und seinem Nenner, und erst dadurch, daſs beyde durch ihn dividirt werden, entsteht der ihm gleiche rationale Bruch $\frac{1}{3}$. Ich habe diesen Zweifel bloſs deshalb angeführt und widerlegt, um theils ähnlichen Zweifeln vorzubauen, theils zu zeigen, daſs wenn bey Brüchen von endlichem Zähler und Nenner für letztere kein gemeinschaftlicher Theiler möglich ist, hieraus noch gar nicht folge, daſs dieses auch bey Brüchen statt finde, deren Zähler und Nenner unendlich groſs sind. Es wird daher nicht unzweckmässig seyn, hier der merkwürdigen Formel zu erwähnen, welche Herr Professor *Klügel* in seiner *analytischen Trigonometrie* Kap. 5. V, für das Verhältniſs

des Quadranten zum Halbmesser des Kreises giebt, nämlich daſs dieses $= \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13}$ etc. ist. Hier lassen sich nun zwar im Zähler die Factoren 6.6.10.10.12.12 etc. durch die correspondirenden im Nenner 3.3.5.5.3.3 etc. dividiren, und es entstehen an ihrer Stelle im Zähler lauter gerade Zahlen 2.2.2.2.4.4 etc. Allein es ist leicht einzusehen, daſs auch nach dieser Division die Menge der Factoren im Zähler und Nenner dennoch unendlich groſs bleibt. Nun ist, da auch nach dieser Division die Factoren des Zählers lauter gerade, des Nenners aber lauter ungerade Zahlen sind, so lange man Zähler und Nenner irgendwo aufhören läſst, kein gemeinschaftlicher Theiler von beyden möglich. Wäre man also berechtigt, hieraus unmittelbar zu schlieſsen, daſs der Zähler und Nenner auch für den Fall, von welchem hier eben die Rede ist, da beyde unendlich groſs sind, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben könnten, mithin der Bruch schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt wäre; so würde, da sein Zähler und Nenner gleichwohl unendlich sind, hieraus auf die angenehmste und leichteste Weise unmittelbar erhellen, daſs das Verhältniſs des Quadranten zum Halbmesser, mithin auch der Kreislinie zum Durchmesser irrational sey. Allein daſs man nicht berechtigt ist, von der Beschaffenheit des Zählers und Nenners, wenn beyde endlich sind, auf ihre Beschaffenheit für den Fall zu schlieſsen, wenn sie unendlich sind, zeigt schon der vorerwähnte Bruch $\frac{3333\ldots}{10000\ldots}$ ganz augenscheinlich. Wollte man also diese merkwürdige Formel zum Beweise der Irrationalität der Kreislinie nutzen; so müſste man erst entweder beweisen, daſs Zähler und Nenner des Bruchs keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben, oder diesen wirklich aufsuchen, um zu sehen, ob sein Zähler und Nenner durch denselben

dividirt, auch noch unendlich bliebe. Ob aber das eine oder das andere in der That thunlich sey, möchte ich fast zweifeln. Wenigstens müſste dieser Beweis nicht nur gleichfalls auf dem Wege des Unendlichen geführt werden, sondern dürfte ohne Zweifel auch weit schwieriger und verwickelter werden, als derjenige, den ich in der fünften Abhandlung mit einer Evidenz gegeben habe, die sich in dieser Materie wohl schwerlich gröſser denken läſst.

Was endlich die letzte sechste Abhandlung über das Fundament der Leibnizischen Differentialrechnung betrifft, welche schon seit einigen zwanzig Jahren ein mir äuſserst angelegentlicher Gegenstand des Nachdenkens gewesen ist; so wünschte ich vorzüglich, daſs unbefangene gründliche Mathematiker dieselbe ihrer Aufmerksamkeit würdigen, und sie der strengsten Prüfung unterwerfen mögen. Die erhabene unschätzbare Wissenschaft, von der hier die Rede ist, ist eben diejenige, deren ganzer Zweck einzig und allein dahin geht, die so nöthige Erleichterung der Mathematik im höchst möglichen Grade zu befördern, und zwar betrift derselbe nicht bloſs die Erleichterung gewisser einzelner Theorien, sondern er geht ins Allgemeine, und umfaſst das ganze unermeſsliche Gebiet der Analysis, dessen mögliche Erweiterung keine Grenzen kennt. Jede Verfahrungsart, die man an die Stelle der ihrigen setzen wollte, so scharfsinnig, bündig, lehrreich und fruchtbar sie auch seyn möchte, würde also wenigstens den Nachtheil stiften, daſs sie diesen wichtigen Zweck derselben gänzlich aufhöbe, mithin im Grunde sie wirklich vernichtete. Man substituire ihr z. B. die mit Recht geschätzte Exhaustionsmethode der Alten. Der unsterbliche Erfinder der Differentialrechnung kannte und schätzte sie gewiſs so sehr als irgend

jemand. Aber um den mühsamen und weitläuftigen Gang derselben zu ersparen, erfand er ja eben seinen von allen übrigen Methoden so unendlich abweichenden Differentialcalcul. So darf man nur den Versuch betrachten, welchen Herr *L' Huilier* in seiner Preisschrift: *Exposition elementaire des Principes des Calculs superieurs à Berlin* 1786, und ausführlicher in seinem Werke: *Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae* 1795 gemacht hat, die Exhaustionsmethode so bequem einzurichten, dafs sie die Leibnizische Differentialrechnung entbehrlich mache. Jeder gründliche Denker wird bey seinem scharfsinnigen Verfahren mit Vergnügen verweilen, aber es auch bald erfahren, wie sehr dasselbe dem Leibnizischen an Kürze und Leichtigkeit nachsteht. Die Analysis hat vor kurzem, nämlich 1798 das Glück gehabt, durch zwey Werke bereichert zu werden, die beynahe das *non plus ultra* derselben zu seyn scheinen. Das erstere ist: *Theorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul differentiel, degagés de toute considération d' infiniment petits ou d' évanouissans, de limites ou de fluxions, et reduits à l' analyse algébrique des quantités finies; par J. L. Lagrange, de l' Instisut national. Paris de l' imprimerie de la republique, Prairial an V.* Das letztere ist: *Traité du calcul differentiel et du calcul intégral par S. F. Lacroix, a Paris chez J. B. M. Duprat, an V. in quarto.* Von beyden hat Herr Prof. *Grüson* eine deutsche Übersetzung geliefert. Beyde Werke haben die Absicht, die Leibnizische Differentialrechnung zu begründen, und zwar durch eine neue, überaus scharfsinnige und allgemeine Entwickelung der Functionen. Sie zeigen nämlich, wie man aus jeder gegebenen Function von x, eine neue für $x+i$, aus dieser nach eben der Methode wieder die zweyte, dritte u. s. w. ab-

leiten könne, und zwar so, dafs in diesen abgeleiteten Functionen jedes Glied so angenommen werden kann, dafs es gröfser wird, als die Summe aller folgenden. Diese von der gegebenen ursprünglichen Function successiv *abgeleiteten* Functionen sind daher, da man für jede blofs das *erste* Glied der Reihe nöthig hat, nichts anders, als die *Differentialen der verschiedenen Ordnungen*, und so entsteht hieraus ein neuer Differentialcalcul, der am Ende mit dem Leibnizischen völlig einerley ist, aber von letzterm sich dadurch unterscheidet, dafs er auf die blofse Entwickelung der Functionen, nach den Regeln der *gemeinen* Analysis zurückgeführt wird. Aus dieser neuen Ansicht und musterhaften Bearbeitung der Sache ist unleugbar, dafs diese beyden Werke eine unerwartet grofse Erweiterung der *gemeinen* Analysis, und daher für diese ein aufserordentlich wichtiges Geschenk sind. Allein eben so unleugbar ist es auch, dafs sie nicht Werke für Anfänger, sondern nur für Kenner und sehr geübte Analysten sind, und dafs also, wofern der Leibnizische Differentialcalcul an sich bodenlos wäre, und erst durch sie begründet werden müfste, sein ganzer und einziger Zweck, nämlich die höchstmögliche Erleichterung der analytischen Operationen gänzlich dahin wäre, mithin er selbst in der That vernichtet, und durch eine neue Analysis verdrängt werden müfste, die, so vortrefflich sie auch ist, dennoch mehr Mühe, Anstrengung und Weitläuftigkeit erfordert, als irgend eine von den alten Methoden, zu deren Ersparung doch eben Leibniz seinen Calcul lediglich bestimmte. Man vergleiche z. B. nur das kurze, und für jeden Anfänger so äufserst leichte Verfahren, durch welches sich, wie ich gezeigt habe, das Differential einer jeden Grundfunction, nämlich der Producte, Quotienten, Potenzen, von jedem Exponenten und Logarithmen, finden läfst, mit den müh-

samen Entwickelungen und Substitutionen, die man zu diesem Zweck nach *Lacroix* vornehmen mufs. Eben so darf man nur die mühsamen Operationen, welche *Lacroix* zur Auflösung des polynomischen Problems in seiner Einleitung vornehmen mufs, um am Ende die schwerfällige, und wegen der Unregelmässigkeit der Coefficienten wenig brauchbare Formel des *Moivre* herauszubringen, mit dem leichten und kurzen Verfahren vergleichen, durch welches *Kästner* mittelst der *Leibnizischen* Differentialrechnung seine schöne allgemeine Formel fand, in welcher der regelmässige Fortgang der Glieder der Reihe so evident ist.

Obgleich indessen der Vorzug der Leichtigkeit, durch welchen sich die Leibnizische Differentialrechnung auszeichnet, so wichtig ist, dafs man die Verdrängung ihres Gebrauchs wohl nie befürchten darf; so würde sie dennoch dem theoretischen Analysten mit Recht ein Anstofs bleiben, wofern der Vorwurf, dafs sie auf widersinnigen Principien erbaut sey, und daher keine *selbstständige Gründlichkeit* habe, in der That gegründet wäre. Denn der Gründlichkeit mufs in der Mathematik jede andere Rücksicht weichen. Allein dafs dieser Vorwurf eine blofse Verkennung ihres wahren Geistes zum Grunde hat, und dafs ihr Fundament nicht nur unerschütterlich fest und *selbstständig* ist, sondern sogar die Exhaustionsmethode der Alten, welche keine andere Verfahrungsart in der höhern Geometrie und Mechanik, ja nicht einmal in den Elementarsätzen vom Kreise entbehren kann, erst begründen mufs, wofern dieselbe nicht auf offenbar *unächten* Axiomen ruhen, sondern den Ruhm der Gründlichkeit mit Recht verdienen soll, habe ich nach meiner völligen Überzeugung so unwidersprechlich bewiesen, dafs ich jeder noch

so strengen, nur, wie sich von selbst versteht, bescheidenen Widerlegung mit Vergnügen entgegen sehen werde.

Wenn je ein Calcul dem Leibnizischen Differentialcalcul an Leichtigkeit, Simplicität und Kürze nahe oder gar gleich kommt; so ist es der überraschend sinnreiche und scharfsinnige, welchen Herr Prof. *Pasquich* unter dem Titel: *Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung*, im achten Hefte des Hindenburgschen Archivs der reinen und angewandten Mathematik, 1798. S. 386—424. bekannt gemacht hat, und welcher, wie Hr. *Hindenburg* am Schlusse richtig bemerkt, in der That eine neue, von allen Begriffen des Unendlichkleinen ganz unabhängige, und auf den einfachsten Gründen beruhende Rechnung ist, die alles, was bisher nur immer die Differentialrechnung geleistet hat, eben so schnell und leicht zu leisten vermögend scheint. Bey ihrer wesentlichen Verschiedenheit von der Differentialrechnung ist dennoch die Ähnlichkeit des Verfahrens in beyden so auffallend groſs, daſs es wohl der Mühe verlohnen würde, die Quelle derselben bis auf den ersten Grund nachzuspühren. Der Geist dieses neuen Calculs besteht kürzlich darinn; Herr *Pasquich* postulirt, daſs die allgemeinste Form, unter welcher sich jede Function y einer veränderlichen Gröſse z betrachten läſst, diese sey:

$$y = Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d + \text{etc.}$$

Wenn man nun in der Reihe für die Function y jedes Glied durch seinen Exponenten von z (den Exponenten o nicht ausgenommen), multiplicirt; so nennt er die neue Function, die aus y entsteht, das *Exponential* von y, und bezeichnet es sehr passend

durch εy, und so ist in der allgemeinsten Form für die Function y,

$$\varepsilon y = aAz^a + bBz^b + cCz^c + dDz^d + \text{etc.}$$

z. B. wenn $y = 3x^2 - 5x^{-3} + 2x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{2}{3}}$; so ist

$$\varepsilon y = 6x^2 + 15x^{-3} + \tfrac{6}{4}x^{\frac{3}{4}} - \tfrac{14}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

wenn $y = a^4 - 6a^2x^4 + 9x^8$; so ist

$$\varepsilon y = 0 . a^4x^0 - 4 . 6a^2x^4 + 8 . 9 . x^8 = -24a^2x^4 + 72x^8.$$

Hieraus fliefsen nun sogleich folgende Hauptsätze;

1) $\varepsilon . xy = y . \varepsilon x + x . \varepsilon y$

2) $\varepsilon . x^n = nx^{n-1} . \varepsilon x$

3) $\varepsilon . \dfrac{x}{y} = \dfrac{y . \varepsilon x - x . \varepsilon y}{y^2}$

u. s. w.

Da also die Grundoperationen des Exponentiirens mit denen des Differentiirens ganz einerley sind, und sich blofs durch die Zeichen εy, εx, und dy, dx unterscheiden; so läfst sich schon hieraus völlig übersehen, dafs die Exponentialrechnung eben so leicht ist, als die Differentialrechnung, und vor dieser noch den Vorzug hat, dafs sie blofs auf Begriffen des Endlichen ruht, und da sie gleichwohl auf ebendieselben Resultate führt, als die Differentialrechnung, zugleich als die schönste, leichteste und evidenteste Bestätigung der Richtigkeit der letztern ist. Hätte also die Leibnizische Differentialrechnung nicht selbstständige Evidenz und Festigkeit; so wäre die Exponentialrechnung des Herrn *Pasquich* das erwünschteste Surrogat, das man in die Stelle von jener setzen könnte. Allein Herr *Pasquich* ist von der Absicht, durch seinen Calcul den Leibnizischen verdrängen zu wollen, selbst so weit entfernt, dafs er

im Intelligenzblatte der Allg. Litt. Zeitung 1798. No. 99. ausdrücklich erklärt, wie er jeden neuen Calcul, wodurch man das zu ersetzen suche, was der *schlecht abgehandelten* Differentialrechnung fehlt, für ganz entbehrlich halte. Diese Erklärung macht seiner Unpartheiligkeit und Bescheidenheit gleichviel Ehre. Denn erstlich muſs jeder Unpartheyische gestehen, daſs der Differentialcalcul, selbst bey dem schlechten Vortrage in den Lehrbüchern der ältern Differentiisten, schon an sich eine solche Evidenz hat, daſs kein Unbefangener seine Richtigkeit im Ernst bezweifeln, und die Verdrängung desselben für unentbehrlich halten kann. Erwägt man aber, wie sehr dieser Vortrag von den neuern Analysten, einem Euler, Segner, Karsten, Kästner etc. verbessert worden, würde nicht der Versuch einer solchen Verdrängung unverzeihliche Ungerechtigkeit und Undankbarkeit gegen diese so verdienstvolle Männer seyn? Und würde der Nachtheil für die Mathematik selbst wohl zu berechnen seyn, wenn man die erhabene Wissenschaft, welcher sie ihre ganze gegenwärtige Vollkommenheit zu verdanken hat, gleichsam zu Grabe tragen und in Vergessenheit bringen, und statt ihrer, den Lehrlingen der Mathematik einen neuen Calcul, welcher er auch sey, aufdringen wollte? Würden dann nicht alle jene vortrefflichen Werke, welche seit 1684. in der höhern Analysis erschienen sind, schon für die nächste Generation so unverständliche und versiegelte Schriften seyn, daſs sie nicht einmal fähig seyn würde, die mathematische *Geschichte* dieser für die Mathematik so glänzenden Zeitperiode zu verstehen? Gesetzt also, der Vorwurf der Ungründlichkeit, womit man die Differentialrechnung, vorzüglich seit ihrem hundertjährigen Jubelfeste, noch immer zu belegen fortfährt, wäre wirklich gegründet; so müſste dennoch der Differentialcalcul das

erste wesentlichste und unentbehrlichste Hauptstudium der höhern Analysis bleiben, und hiebey es einem jeden überlassen werden, wie weit er auch die übrigen Methoden zu benutzen Zeit, Lust und Fähigkeit hat. Allein dieser Vorwurf ist ungerecht, und gründet sich bloſs auf der Verkennung der wahren Principien dieser Wissenschaft, welche 1) in der unvermeidlichen und unentbehrlichen Fiction unendlichvielster Theile der Gröſsen, und 2) in dem unwidersprechlich festen Satze bestehen, daſs ein jeder solcher, bloſs fingirter unendlichvielste Theil einer endlichen Gröſse kein wirklicher Theil von ihr, sondern bloſs *Grenze*, und also eine wahre Null ist. — Principien, ohne welche keine Geometrie und Mechanik möglich ist, die den Ruhm einer wahren Gründlichkeit mit Recht verdient. In Rücksicht der Anwendung auf Geometrie und Mechanik ist also gar kein Calcul als gründliches Surrogat des Differentialcalculs *möglich*, sondern jeder andere hat hier den Gebrauch der Exhaustionsmethode, und daher Grundsätze nöthig, die keine gesunde Logik für ächte, keines Beweises mehr bedürftige Axiome anerkennen kann, und die sich durch die beyden angeführten Principien der Differentialrechnung, und zwar bloſs durch diese, mit der gröſsesten Schärfe wirklich demonstriren lassen. Ich habe vorhin gesagt, und wiederhohle es, daſs wenn der Differentialcalcul eines Surrogats bedürfte, ich kein vollkommeneres wüſste, als Herrn Pasquichs neue Exponentialrechnung. Allein da auch diese bey der Anwendung auf die Geometrie und Mechanik sofort ihre Zuflucht zu den unächten Grundsätzen der Exhaustionsmethode zu nehmen gezwungen ist; so steht sie in dieser Rücksicht eben so, wie jeder andere Calcul, der Differentialrechnung weit nach. Nun könnte es, da die Regeln zu exponentiiren vom Begriffe des Unendlichkleinen

ganz unabhängig sind, zwar scheinen, dafs sie wenigstens als eigentlicher *Calcul*, d. i. so fern sie blofs auf dem Gebiete der Arithmetik bleibt, den Differentialcalcul an Gründlichkeit überträfe. Allein letzterm als blofsem Calcul, d. i. den allgemeinen Regeln, Gröfsen überhaupt zu differentiiren, auch nur den kleinsten Mangel der Gründlichkeit vorzuwerfen, wäre ohnehin das gröfseste Mifsverständnifs. Denn da die Differenz Δy irgend einer Function y von einer veränderlichen Gröfse x nichts anders, als das Increment bedeutet, welches y erhält, wenn x um Δx wächst; so mufs die Formel für Δy, wenn sie für jedes endliche Increment Δx, es sey noch so grofs, oder noch so klein, wahr seyn soll, auch für die Fälle wahr seyn, wenn man Δx *unendlich grofs*, oder als *Null* annimmt, und eben so mufs auch die Formel für das Verhältnifs der Incremente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in beyden letztern Fällen wahr seyn. Denn wollte man das eine oder das andere bezweifeln; so wäre es um die uneingeschränkte Allgemeinheit der Arithmetik völlig geschehen. Man setze z. B. $y = x^3$; so ist, wenn x um Δx wächst, von y das Increment $\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$. Nun setze man $\Delta x = \infty$; so mufs $\Delta y = 3x^2 . \infty + 3x . \infty^2 + \infty^3 = \infty^3$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty^2$ seyn. Eben so setze man $\Delta x = 0$; so mufs $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2 = 3x^2$, und $\Delta y = 3x^2 \Delta x = 0$ seyn. Nun ist das Verhältnifs der Differentialen dy, dx nichts anders, als das Verhältnifs der Incremente Δy, Δx für den Fall, da man $\Delta x = 0$ setzt. Also ist das Differentiiren als ein solches eben so wenig von dem Begriffe des Unendlichkleinen abhängig, als das Expo-

nentiiren, sondern man hat, um das Differentialverhältnifs $\frac{dy}{dx}$ zu finden, nichts weiter nöthig, als in der allgemeinen Formel für das Incrementen-Verhältnifs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schlechthin $\Delta x = o$ zu setzen, wo dann also auch wieder $\Delta y = o$ wird. Dieses wird genug seyn, um einzusehen, wie zweckwidrig es seyn würde, selbst durch die vortreffliche Exponentialrechnung des Herrn *Pasquich* die Differentialrechnung verdrängen zu wollen.

Es ist merkwürdig, dafs in eben dem Jahre 1798, da Herrn *Pasquichs* neue Exponentialrechnung erschien, Herr Professor *Grüson* den 14. Junii in seiner ersten Vorlesung vor der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin gleichfalls einen neuen Expositions-Calcul vorgetragen, den er 1802 in Berlin unter dem Titel: *Memoire sur le Calcul d' Exposition inventé par Jean Philippe Gruson, Professeur royal des mathematiques* etc. in quarto herausgegeben hat, welchem er in der Einleitung nicht nur eben die Leichtigkeit und Kürze, als der Differentialrechnung, sondern vor dieser den Vorzug beylegt, dafs er klärer und evidenter sey, ja dafs derselbe ihn weiter geführt habe, als man bisher gekommen, und an Simplicität, Schnelligkeit und Allgemeinheit der Operationen dem *combinatorischen* Calcul des Herrn *Hindenburg* nicht nachstehe. So viel ich einsehen kann, ist diese *Expositionsrechnung* mit der Pasquichschen *Exponentialrechnung* im Wesentlichen einerley. Was ich daher von dieser geurtheilt habe, gilt auch von jener.

Während man die Gründlichkeit der Differentialrechnung fast überall anfocht, und diese erhabene Wissenschaft durch neue Methoden zu verdrängen suchte, muſste es einem jeden Verehrer ihres groſsen Erfinders eine eben so angenehme als unerwartete Erscheinung seyn, einen *Carnot* in seinen *Reflexions sur la Metaphysique du Calcul Infinitesimal. Paris* 1797 als freymüthigen Vertheidiger derselben auftreten zu sehen. Ob indessen seine sinnreichen Versuche ihre Gründlichkeit *evident* zu machen, befriedigend sind, überlasse ich dem unbefangenen Urtheil meiner Leser selbst.

Inhalts - Anzeige.

I.

Sehr leichte und kurze allgemeine Theorie der Logarithmen, nebst einer neuen Methode, aus den Logarithmen von 2 und 5 Formeln zu finden, mittelst welcher sich die Logarithmen der übrigen Primzahlen mit der gröſsesten Leichtigkeit bis auf 30, 40, 50 und mehrere Decimalziffern berechnen lassen, und einer Tafel von dergleichen Formeln für die Logarithmen der Primzahlen von 3 bis 1009. - - - - - - - - - - Seite 1

II.

Sehr leichte und kurze allgemeine analytische Auflösung des polynomischen Problems. - - - - - - - - - - 39

III.

Sehr leichter und kurzer allgemeiner synthetischer Beweis des binomischen und polynomischen Lehrsatzes. - - - - - - 75

IV.

Allgemeine Theorie der Kettenbrüche. - - - - - - - - 99

V.

Beweis, daſs das Verhältniſs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser irrational ist. - - - - - - - - - - Seite 161

VI.

Über das Fundament der Differentialrechnung. - - - - 179

Anhang über Tangente und Secante des rechten Winkels. - - 231

I.

Sehr leichte und kurze
allgemeine
Theorie der Logarithmen
nebst einer neuen Methode,

aus den Logarithmen von 2 und 5 Formeln zu finden, mittelst welcher sich die Logarithmen der übrigen Primzahlen mit der grössesten Leichtigkeit bis auf 30, 40, 50 und mehrere Decimalziffern berechnen lassen

und

einer Tafel von dergleichen Formeln für die Logarithmen der Primzahlen von 3 bis 1009.

Erklärung 1.

§. 1.

Wenn $a^x = y$ ist; so heifst x der *Logarithmus* von y für die Grundzahl a, und die Logarithmen der Zahlen für dieselbe Grundzahl machen zusammen ein *logarithmisches System.* Ist dieses von der Art, dafs, wenn der Logarithmus einer Zahl um seinen unendlichvielsten Theil wächst, die Zahl selbst um ihren m^{ten} Theil *mehrmal* zunimmt, als der unendlichvielste Theil des Logarithmen beträgt, d. i. wenn die Zahl m von der Gröfse ist, dafs $a^{x+\frac{x}{\infty}} = y + \frac{y}{m} \cdot \frac{x}{\infty}$ ist; so heifst m der *Modul* des logarithmischen Systems.

Zusatz. Da also $a^x . a^{\frac{x}{\infty}} = y + \frac{yx}{m\infty}$ ist; so ist

$$1.\quad a^{\frac{x}{\infty}} = 1 + \frac{x}{m\infty}$$

$$2.\quad y^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{x}{m\infty}$$

$$3.\quad a^x = \left(1 + \frac{x}{m\infty}\right)^\infty$$

$$4.\quad y = \left(1 + \frac{x}{m\infty}\right)^\infty$$

$$5.\quad a = \left(1 + \frac{1}{m\infty}\right)^\infty$$

$$6.\quad x = m\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$$

$$7.\quad m = \frac{x}{\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)}$$

Lehrsatz 1.

§. 2. In jedem logarithmischen System, dessen Modul $= m$ ist, ist die Grundzahl $a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2.3m^3} + \frac{1}{2.3.4m^4} + \ldots$

Beweis. Denn da $a = \left(1 + \frac{1}{m\infty}\right)^{\infty}$ ist (§. 1. Zus. n. 5.); so ist, nach dem binomischen Lehrsatz,

$$a = 1 + \frac{\infty}{1.m\infty} + \frac{\infty.\infty-1}{1.2.m^2\infty^2} + \frac{\infty.\infty-1.\infty-2}{1.2.3m^3\infty^3} + \frac{\infty.\infty-1.\infty-2\,\infty-3}{1.2.3.4m^4\infty^4} + \ldots$$

Da nun $\infty = \infty - 1 = \infty - 2 = \infty - 3$ etc. ist, so ist

$$a = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2.3m^3} + \frac{1}{2.3.4m^4} + \ldots$$

Zusatz. Also ist durch den Modul m die Grundzahl a, mithin das ganze logarithmische System gegeben, und ein anderer Modul giebt auch eine andere Grundzahl und ein anderes System.

Lehrsatz 2.

§. 3. In zwey verschiedenen Systemen verhalten sich die Logarithmen derselben Zahl, wie die Moduls ihrer Systeme, und wenn man den Quotienten aus dem Logarithmo einer Zahl durch den Modul seines Systems in den Modul eines andern Systems multiplicirt; so bekommt man den Logarithmum eben dieser Zahl im andern System, nämlich: wenn für den Modul m der Logarithmus von $y = x$, und für den Modul n der Logarithmus von $y = u$ ist, so ist

$$x:u = m:n, \text{ und } x = m.\frac{u}{n}, \; u = n.\frac{x}{m}.$$

Beweis. Denn für den Modul m ist $x = m\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$ und für den Modul n ist $u = n\infty\left(y^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$ (§. 1. Z. n. 6.), folglich $x:u = m:n$, also auch $x = m.\frac{u}{n}$, $u = n.\frac{x}{m}$.

Zusatz. Also ist der Modul diejenige Zahl, durch deren Multiplication die Logarithmen des einen Systems sich in die Logarithmen eines jeden andern verwandeln lassen.

Erklärung 2.

§. 4. Dasjenige logarithmische System, dessen Modul = 1 ist, heiſst das *natürliche*, imgleichen das *hyperbolische*, und die Logarithmen desselben heiſsen gleichfalls die *natürlichen*, oder *hyperbolischen*. Ist hingegen der Modul eines Systems gröſser oder kleiner als 1; so heiſst es ein *künstliches*, und die Logarithmen desselben heissen gleichfalls *künstliche*. Zu kürzerer Unterscheidung wollen wir die natürlichen durch λ, und die künstlichen durch l bezeichnen, z. B. λy heiſst der natürliche, und ly ein künstlicher Logarithmus der Zahl y.

Zusatz 1. Also ist im natürlichen System, wo $m = 1$ ist, die

Grundzahl $a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$ (§. 2.)

d. i. $a = 2{,}7182818284590452353360\ldots$

Zusatz 2. $ly = m\,\lambda y$, d. i. man bekommt den künstlichen Logarithmum einer Zahl y, wenn man ihren natürlichen durch den Modul m des künstlichen Systems multiplicirt (§. 3.).

Zusatz 3. Also ist $\lambda y = \frac{ly}{m}$, d. i. man bekommt den natürlichen Logarithmum einer Zahl y, wenn man ihren künstlichen durch den Modul m des künstlichen Systems dividirt (Z. 2.).

Zusatz 4. Eben daher ist $m = \frac{ly}{\lambda y}$, d. i. man bekommt den Modul m eines künstlichen Systems, wenn man den künstlichen Logarithmum einer beliebigen Zahl y durch ihren natürlichen dividirt.

Zusatz 5. Wenn daher $\lambda y = 1$ ist; so ist $ly = m$, d. i. diejenige Zahl, deren natürlicher Logarithmus dem Modul 1 des natürlichen Systems gleich ist, ist zugleich diejenige, deren künstlicher Logarithmus dem Modul m seines künstlichen Systems gleich ist.

Zusatz 6. Also ist der Modul m eines künstlichen Systems dem künstlichen Logarithmo der Grundzahl a des natürlichen Systems gleich. Denn diese ist diejenige Zahl, deren natürlicher Logarithmus $= 1$ ist, z. B. der Briggische Logarithmus von $2{,}71828\ldots$ ist $0{,}434294\ldots$, also ist der Modul m des Briggischen Systems $= 0{,}434294\ldots$

Zusatz 7. Wenn hingegen $ly = 1$ ist; so ist $m = \frac{1}{\lambda y}$ (Z. 4.), d. i. wenn man den Modul 1 des natürlichen Systems durch den natürlichen Logarithmum derjenigen Zahl dividirt, deren künstlicher Logarithmus $= 1$ ist, so bekommt man gleichfalls den Modul m des künstlichen Systems.

Zusatz 8. Also bekommt man den Modul m eines künstlichen Systems am bequemsten, wenn man 1 durch den natürlichen Logarithmum der Grundzahl des künstlichen Systems dividirt. Denn die Grundzahl des künstlichen Systems ist diejenige, deren künstlicher Logarithmus $= 1$ ist.

Z. B. im Briggischen System ist die Grundzahl $a = 10$, folglich

$$m = \frac{1}{\lambda.\,10} = \frac{1}{2{,}302585092994045\ldots}$$

$$= 0{,}434294481903251827651\ldots$$

Lehrsatz 3.

§. 5. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist

$$\log.\ (1+z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - + \ldots\right),\ \text{und}$$

$$\log.\ (1-z) = -m\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} + \ldots\ldots\right).$$

Beweis. Denn $\log.\ (1+z) = m\infty\ (1+z)^{\frac{1}{\infty}} - m\infty$ (§. 1. Z. no. 6). Nun ist

$$(1+z)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{\infty}z + \frac{1-\infty}{2\infty^2}z^2 + \frac{1-\infty.\,1-2\infty}{2.\,3\infty^3}z^3 + \frac{1-\infty.\,1-2\infty.\,1-3\infty}{2.\,3.\,4\infty^4}z^4 + \ldots$$

und $1 - \infty = -\infty$, $1 - 2\infty = -2\infty$, $1 - 3\infty = -3\infty$ etc.

folglich $(1+z)^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{z}{\infty} - \frac{z^2}{2\infty} + \frac{z^3}{3\infty} - \frac{z^4}{4\infty} + - \ldots,$

mithin $m\infty\,(1+z)^{\frac{1}{\infty}} = m\infty + m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots\right),$

$$\text{also log. } (1+z) = m\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \ldots\right)$$

$$\text{und log. } (1-z) = m\left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots\right)$$

$$= -m\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \ldots\right).$$

Zusatz 1. Setzt man $z = n - 1$; so ist $1 + z = n$, also ist im natürlichen System, wo $m = 1$ ist,

$$\text{I. } \lambda.\, n = (n-1) - \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)^4}{4} + \ldots.$$

Mittelst dieser Reihe kann man also schon die natürlichen Logarithmen finden, aber da sie sich dem wahren Werthe sehr langsam nähert, nur sehr mühsam. Z. B.

$$\lambda.\, 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + - \ldots$$

Zusatz 2. Setzt man $z = \frac{n-1}{n}$; so ist $\frac{1}{n} = 1 - z$, folglich

$$\lambda.\, \frac{1}{n} = -\left[\frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{2\,n^2} + \frac{(n-1)^3}{3\,n^3} + \frac{(n-1)^4}{4\,n^4} + \ldots\right], \text{ also}$$

$$\text{II. } \lambda.\, n = \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{2\,n^2} + \frac{(n-1)^3}{3\,n^3} + \frac{(n-1)^4}{4\,n^4} + \ldots.$$

Diese Reihe giebt den natürlichen Logarithmum der Zahl 2 schon mit einiger Bequemlichkeit. Denn

$$\lambda.\, 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{160} + \tfrac{1}{384} + \ldots$$

Für die folgenden Zahlen aber wird die Berechnung schon mühsam, und zwar immer mühsamer, je gröſser sie werden.

Lehrsatz 4.

§. 6. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist

$$\log. \frac{1+z}{1-z} = 2m\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \ldots\right).$$

Beweis. Denn da $\log. \frac{1+z}{1-z} = l(1+z) - l(1-z)$ ist; so ist der Satz richtig (§. 5.).

Zusatz 1. Setzt man daher $z = \frac{n-1}{n+1}$; so ist $nz + z = n - 1$, folglich $1 + z = (1-z)n$, mithin $\frac{1+z}{1-z} = n$. Also ist

$$\text{III. } \lambda.\, n = 2\left(\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \ldots\right)$$

Mittelst dieser Reihe kann man den natürlichen Logarithmum der Zahl 2 schon sehr bequem berechnen. Denn

$$\lambda.\, 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 . 1^{11}} + \ldots\right)$$

$$= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{81} + \tfrac{2}{1215} + \tfrac{2}{15309} + \tfrac{2}{177147} + \tfrac{2}{1948617} + \tfrac{2}{20726199} + \ldots$$

Da die Glieder dieser Reihe sehr schnell abnehmen; so nähert sich dieselbe dem Werthe von $\lambda.\, 2$ sehr bald. Die wirkliche Berechnung läſst sich sehr erleichtern. Denn man darf nur $\frac{2}{3}$ in einen Decimalbruch verwandeln, diesen immerfort durch 9 als das Quadrat von 3 dividiren, die hiedurch erhaltenen Decimalbrüche wieder nach der Reihe durch 1, 3, 5, 7, 9 etc. dividiren, und die Quotienten addiren, wie folgende Rechnung zeigt:

$\frac{2}{3}$ =	0,6666666666	: 1 =		0,6666666666
9 \|	740740740	: 3 =		246913580
9 \|	82304526	: 5 =		16460905
9 \|	9144947	: 7 =		1306421
9 \|	1016105	: 9 =		112900
9 \|	112900	: 11 =		10263
9 \|	12544	: 13 =		964
9 \|	1398	: 15 =		92
9 \|	155	: 17 =		9
		λ. 2 =		0,6931471800

Hier geben also die 9 ersten Glieder der Reihe λ. 2 schon auf 9 Decimalziffern richtig, und man kann ihn also auch ohne zu groſse Mühe auf mehrere finden. Für die gröſsern Zahlen 3, 5, 7 aber wird die Rechnung schon viel mühsamer. Allein für diese lassen sich, wie bald erhellen wird, sehr bequeme Reihen angeben, sobald nur erst der Logarithmus von 2 auf sehr viele Decimalziffern bekannt ist.

Wenn in einem künstlichen System der Modul m entweder willkührlich angenommen wird, oder schon bekannt ist; so läſst sich mittelst dieser Reihe mit eben der Leichtigkeit auch der künstliche Logarithmus von 2 unmittelbar finden. Denn man darf nur das erste Glied $\frac{2m}{3}$ in einen Decimalbruch verwandeln, und dann eben so, wie vorhin, verfahren. Z. B. im Briggischen System, wo m = 0,434294481903..., ist

$\frac{2m}{3}$ =	0,289529654602	: 1 =		0,289529654602
9 \|	32169961622	: 3 =		10723320540
9 \|	3574440180	: 5 =		714888036
9 \|	397160020	: 7 =		56737145
9 \|	44128891	: 9 =		4903210
9 \|	4903210	: 11 =		445746
9 \|	544801	: 13 =		41907
9 \|	60533	: 15 =		4035
9 \|	6725	: 17 =		395
9 \|	747	: 19 =		39
9 \|	83	: 21 =		3
		l. 2 =		0,301029995658,

wo also der Briggische Logarithmus von 2 schon auf 10 Decimalziffern richtig ist.

Zusatz 2. Setzt man $z = \frac{1}{2n^2 - 1}$; so ist $1 + z = \frac{2n^2}{2n^2 - 1}$ und $1 - z = \frac{2(n^2 - 1)}{2n^2 - 1}$, folglich $\frac{1+z}{1-z} = \frac{n^2}{n^2 - 1}$. Also ist

$$l.\ \frac{n^2}{n^2-1} = 2m\left(\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3(2n^2-1)^3} + \frac{1}{5(2n^2-1)^5} + \frac{1}{7(2n^2-1)^7} + \ldots\right)$$

Da man nun jede Zahl r als ein Quadrat ansehen kann, so ist

$$l.\ \frac{r}{r-1} = \frac{2m}{2r-1} + \frac{2m}{3(2r-1)^3} + \frac{2m}{5(2r-1)^5} + \frac{2m}{7(2r-1)^7} + \ldots$$

Also kann man mittelst dieser Reihe für jeden Bruch, dessen Zähler und Nenner um 1 differiren, seinen Logarithmum sehr leicht finden, ohne daſs man die Logarithmen des Zählers und Nenners selbst wissen darf.

$$\text{Z. B. } \lambda.\ \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \frac{2}{9 \cdot 5^9} + \ldots$$

folglich $\frac{2}{5}$ =	0,4000000000	: 1 =	0,4000000000	
25 \|	160000000	: 3 =	53333333	
25 \|	6400000	: 5 =	1280000	
25 \|	256000	: 7 =	36571	
25 \|	10240	: 9 =	1137	
25 \|	409	: 11 =	37	
25 \|	16	: 13 =	1	
		$\lambda.\ \frac{3}{2}$ =	0,4054651079,	

wo also die 7 ersten Glieder der Reihe den $\lambda.\ \frac{3}{2}$ schon auf 8 Decimalziffern zuverläſsig geben.

Da $\lambda.\ \frac{3}{2} = \lambda.\ 3 - \lambda.\ 2$; so ist $\lambda.\ 3 = \lambda.\ \frac{3}{2} + \lambda.\ 2$, folglich

$\lambda.\ \frac{3}{2} = 0,40546510\ldots$
$\lambda.\ 2 = 0,693147180\ldots$

also $\lambda.\ 3 = 1,09861228\ldots$

Man kann also durch diese Reihe auch die Logarithmen aller ganzen Zahlen sehr bequem finden. Indessen giebt es für diese noch bequemere Methoden.

Lehrsatz 5.

§. 7. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist

$$\text{IV. } l.n = \frac{l.(n-1)+l.(n+1)}{2} + \frac{m}{2n^2-1} + \frac{m}{3(2n^2-1)^3} + \frac{m}{5(2n^2-1)^5} + \frac{m}{7(2n^2-1)^7} + \ldots$$

Beweis. Denn $2\,l.n - l.(n-1)(n+1) = l.\frac{n^2}{n^2-1}$, folglich

$$l.n = \frac{l.(n-1)(n+1)}{2} + \tfrac{1}{2}\,l.\frac{n^2}{n^2-1}\text{; also}$$

$$l.n = \frac{l.(n-1)+l.(n+1)}{2} + \frac{m}{2n^2-1} + \frac{m}{3(2n^2-1)^3} + \frac{m}{5(2n^2-1)^5} + \ldots$$

Zusatz. Mittelst dieser Formel läſst sich der Logarithmus einer jeden ganzen Zahl aus den Logarithmen der vorhergehenden und nächstfolgenden Zahl äuſserst leicht finden, mithin ist durch dieselbe die Berechnung aller ganzen Zahlen nach der Reihe, also die Verfertigung logarithmischer Tafeln ungemein bequem. Denn da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch die bloſse Addition des Logarithmen der Primzahlen entstehen; so ist es bloſs die Berechnung der letztern, welche Mühe macht. Nun ist, auſser der Zahl 2, jede Primzahl eine ungerade Zahl, folglich die nächſt vorhergehende und folgende allemal gerade, mithin aus kleinern Primzahlen zusammengesetzt, und ihre Logarithmen sind daher, wenn man diese nach der Reihe sucht, bereits gefunden. Also läſst sich durch diese vortrefliche Formel der Logarithmus einer jeden Primzahl nach der Reihe finden.

$$\text{Z. B. } l.3 = \tfrac{1}{2}(l.2 + l.4) + \frac{m}{17} + \frac{m}{3\cdot17^3} + \frac{m}{5\cdot17^5} + \frac{m}{7\cdot17^7} + \ldots$$

$$l.5 = \tfrac{1}{2}(l.4 + l.6) + \frac{m}{49} + \frac{m}{3\cdot49^3} + \frac{m}{5\cdot49^5} + \frac{m}{7\cdot49^7} + \ldots$$

$$l.\,7 = \tfrac{1}{2}(l.\,6 + l.\,8) + \frac{m}{97} + \frac{m}{3 \cdot 97^3} + \frac{m}{5 \cdot 97^5} + \frac{m}{7 \cdot 97^7} + \ldots$$

$$l.\,11 = \tfrac{1}{2}(l.\,10 + l.\,12) + \frac{m}{241} + \frac{m}{3 \cdot 241^3} + \frac{m}{5 \cdot 241^5} + \frac{m}{7 \cdot 241^7} + \ldots$$

$$l.\,13 = \tfrac{1}{2}(l.\,11 + l.\,14) + \frac{m}{297} + \frac{m}{3 \cdot 297^3} + \frac{m}{5 \cdot 297^5} + \frac{m}{7 \cdot 297^7} + \ldots$$

Um die Leichtigkeit dieser Methode anschaulich zu machen, wollen wir $\lambda.\,3$ suchen: Da $17^2 = 289$ ist; so ist

$$\begin{array}{rrcl}
\lambda.\,2 = & 0{,}6931471805 & & \\
\lambda.\,4 = & 1{,}3862945611 & & \\
\hline
2\,| & 2{,}0794415416 & & \\
\hline
 & 1{,}0397207708 & = & 1{,}0397207708 \\
\frac{1}{17} = & 0{,}0588235294 : 1 & = & 0{,}0588235294 \\
289\,| & 2035416 : 3 & = & 678472 \\
289\,| & 7008 : 5 & = & 1401 \\
289\,| & 24 : 7 & = & 3 \\
\hline
 & \lambda.\,3 & = & 1{,}0986122878,
\end{array}$$

wo $\lambda.\,3$ schon auf 8 Decimalziffern zuverläſsig ist.

Bey gröſsern Zahlen aber ist die Bequemlichkeit dieser Methode noch sichtbarer.

$$\text{Z. B. } \lambda.\,919 = \tfrac{1}{2}(\lambda.\,918 + \lambda.\,920) + \frac{1}{1689121} + \frac{1}{3{,}1689121^3} + \ldots$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{folglich} & \lambda.\,918 & = & 6{,}8221973906204\,90 \\
 & \lambda.\,920 & = & 6{,}8243736700430\,85 \\
\hline
 & & 2\,| & 13{,}6465710606635\,75 \\
\hline
 & & & 6{,}8232855303317\,87 \\
 & \frac{1}{1689121} & = & 5920238\,98 \\
\hline
 & \lambda.\,919 & = & 6{,}8232861223556\,85,
\end{array}$$

wo schon die halbe Summe der beyden Logarithmen den gesuchten Logarithmum auf 5, und die leichte Division des ersten Gliedes auf 14 Decimalziffern richtig giebt.

Lehrsatz 6.

§. 8. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist

$$\text{V. } l.r = \tfrac{1}{2} l.(r^2x^2 - 1) - l.x + \frac{m}{2r^2x^2 - 1} + \frac{m}{3(2r^2x^2 - 1)^3} + \frac{m}{5(2r^2x^2 - 1)^5} + \frac{m}{7(2r^2x^2 - 1)^7} + \ldots$$

$$\text{VI. } l.r = \tfrac{1}{4} l.(r^2r^2 - 1) + \frac{m}{2.(2r^2r^2 - 1)} + \frac{m}{2.3(2r^2r^2 - 1)^3} + \frac{m}{2.5(2r^2r^2 - 1)^5} + \frac{m}{2.7(2r^2r^2 - 1)^7} + \ldots$$

Beweis. Denn man setze $rx = n$; so ist $l.n = l.r + l.x$, und $l.(n-1) + l.(n+1) = l.(n^2 - 1) = l.(r^2x^2 - 1)$, folglich

$$l.r + l.x = l.\frac{(r^2x^2 - 1)}{2} + \frac{m}{2r^2x^2 - 1} + \frac{m}{3(2r^2x^2 - 1)^3} + \ldots \text{ (§. 7.)},$$

$$\text{also } l.r = \tfrac{1}{2} l.(r^2x^2 - 1) - l.x + \frac{m}{2r^2x^2 - 1} + \frac{m}{3(2r^2x^2 - 1)^3} + \frac{m}{5(2r^2x^2 - 1)^5} + \ldots$$

Setzt man daher $x = r$; so ist

$$2\,l.r = \tfrac{1}{2} l.(r^2r^2 - 1) + \frac{m}{2r^2r^2 - 1} + \frac{m}{3(2r^2x^2 - 1)^3} + \ldots$$

$$\text{also } l.r = \tfrac{1}{4} l.(r^2r^2 - 1) + \frac{m}{2(2r^2r^2 - 1)} + \frac{m}{2.3(2r^2r^2 - 1)^3} + \frac{m}{2.5(2r^2r^2 - 1)^5} + \ldots$$

Zusatz. Diese beyden Formeln sind sehr merkwürdig. Mittelst V. kann man den Logarithmum einer jeden Zahl r aus dem Logarithmo einer jeden beliebigen Zahl x und aus dem Logarithmo von $(r^2x^2 - 1)$, und mittelst VI. aus dem bloſsen Logarithmo von $(r^2r^2 - 1)$ auſserordentlich leicht finden. Gesetzt z. B. man verlangt den Briggischen Logarithmum von 3; so ist, wenn man beliebig $x = 21$ setzt, $l.(3^2.21^2 - 1) = l.3968$, und $2r^2x^2 - 1 = 7935$, folglich nach V.

$$l.3 = \tfrac{1}{2} l.3968 - l.21 + \frac{m}{7935} + \frac{m}{3 \cdot 7935^3} + \frac{m}{5 \cdot 7935^5} + \ldots$$

$$
\begin{array}{rrl}
\text{folglich} & l.\,3968 = & 3{,}5985716 \\
 & 2\,| & 1{,}7992858 \\
 & l.\,11 = & 1{,}3222193 \\
 & & 0{,}4770665 \\
\dfrac{0{,}4342944}{7935} & = & 547 \\
 & l.\,3 = & 0{,}4771212,
\end{array}
$$

wo also eine einzige leichte Division für 3 Ziffern des Quotienten $l.\,3$ schon auf 7 Dezimalziffern richtig giebt.

Wollte man z. B. den Briggischen Logarithmum von 11, so ist $11^2.11^2-1 = 14640$, und $2(2\,11^2.11^2-1) = 58562$, folglich nach VI.

$$l.\,11 = \tfrac{1}{4}\,l.\,14640 + \frac{m}{58562} + \frac{m}{2.3.58562^3} + \frac{m}{2.5.58562^5} + \ldots$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & \text{mithin } l.\,14640 = & 4{,}1655411 \\
 & 4\,| & 1{,}0413852 \\
\dfrac{0{,}4342944}{58562} & = & 74 \\
 & l.\,11 = & 1{,}0413926
\end{array}
$$

wo alle 7 Decimalziffern gleichfalls zuverlässig sind, und es läſst sich leicht übersehen, daſs diese einzige Division den Logarithmus von 11 wenigstens auf 12 Decimalziffern geben muſs, wenn man für $l.\,14640$ mehrere Decimalziffern in Rechnung bringt. Diese Methode für x jede beliebige Zahl anzunehmen, oder auch $x = r$ zu setzen, um den Logarithmum von r zu finden, dient nun zwar freilich nicht *zur Berechnung* logarithmischer Tafeln, aber um so mehr zur *Prüfung* ihrer Logarithmen, besonders der Logarithmen der *kleinern* Primzahlen, deren Berechnung eben die meiste Mühe macht, indem man diese nach V. und VI. durch die gröſsern ungemein bequemer finden kann, als nach §. 7. IV.

Zusatz 2. Wenn man aber im Stande ist, für eine gegebene Primzahl r eine kleinere x von der Art zu finden, daſs keiner von den einfachen Factoren, aus welchen die Zahl $(r^2x^2 - 1)$ zusammengesetzt ist, gröſser als r ist, oder wenn dieses von der Zahl $(r^2r^2 - 1)$ selbst gilt; so kann man im erstern Falle nach V. und im letztern nach VI.

für $l.r$ eine Formel finden, durch welche man ihn aus den kleinern Logarithmen auf eine sehr grofse Menge Decimalziffern mit erstaunlicher Leichtigkeit berechnen kann. Gesetzt z. B. man verlangt eine bequemere Formel, als alle bisher bekannte. für den Briggischen Logarithmum von 3, so ist $3^2 . 3^2 - 1 = 80$, und $2(2 . 3^2 . 3^2 - 1) = 322$, folglich nach VI.

$$l.3 = \tfrac{1}{4}\, l.80 + \frac{m}{322} + \frac{m}{3 . 322^3} + \frac{m}{5 . 322^5} + \frac{m}{7 . 322^7} + \ldots$$

Nun ist $80 = 2 . 2 . 2 . 10$, folglich $l.80 = 3\, l.2 + 1$. Also läfst sich der *Briggische* Logarithmus von 3 aus dem blofsen $l.2$ durch diese Formel finden, deren Vorzug vor der §. 7. IV., welche unter allen bisher bekannten die bequemste ist, von selbst in die Augen fällt, wie auch folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{rcl} l.80 & = & 1{,}9030900 \\ 4 \,| & & \overline{0{,}4757725} \\ \dfrac{0{,}4342944}{322} & = & 13487 \\ l.3 & = & \overline{0{,}4771212}, \end{array}$$

wo alle 7 Decimalziffern richtig sind.

Will man aber diese Formel auf den *natürlichen* Logarithmum von 3 anwenden; so mufs man, da $\lambda.10$ nicht $= 1$ ist, aufser $\lambda.2$ auch schon $\lambda.10$ wissen.

Gesetzt ferner, man will $l.5$; so ist, wenn man $x = 5$ setzt, $5^2 . 5^2 - 1 = 624 = 2 . 2 . 131$, folglich der eine einfache Factor 131 gröfser als 5, folglich läfst sich nach VI. $l.5$ nicht aus den $l.2$, $l.3$, die kleiner sind, als 5, finden.

Setzt man $x = 3$; so $5^2 . 3^2 - 1 = 224 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 7$, wo $7 > 5$, also ist auch $l.5$ nach V. nicht blofs aus $l.2$ und $l.3$ zu finden, sondern man mufs schon auch $l.7$ wissen.

Setzt man aber $x = 2$; so ist $5^2 . 2^2 - 1 = 99 = 3 . 3 . 11$, wo also wieder schon $l.11$ bekannt seyn mufs, wenn man die Formel V. auf $l.5$ anwenden will.

Verlangt man $l.7$; so ist $7^2.7^2 - 1 = 2400 = 2.2.2.3.10.10$, folglich $l.7^2.7^2 - 1 = 3\,l.2 + l.3 + 2\,l.10$, und

$2(2.7^2.7^2 - 1) = 9602$, also nach VI.

$$l.7 = \tfrac{1}{4}\,l.2400 + \frac{m}{9602} + \frac{m}{3.9602^3} + \frac{m}{5.9602^5} + \ldots,$$

wo die Reihe schon sehr convergirt.

Verlangt man $l.11$; so ist, wenn man $x = 9$ setzt, $11^2.9^2 - 1 = 9800 = 2.7.7.10.10$, wo die Factoren alle kleiner sind, als 11, also ist hier nach V,

$$l.11 = l.\frac{9800}{2} - l.9 + \frac{m}{19601} + \frac{m}{3.19601^3} + \frac{m}{5.19601^5} + \ldots$$

Zusatz 3. Da $r^2x^2 - 1 = (rx+1)(rx-1)$ ist, so darf man, um die Factoren von $r^2x^2 - 1$ zu finden, nur die Factoren von $rx+1$, und von $rx-1$ suchen.

Da ferner $r^2r^2 - 1 = (r^2+1)(r^2-1) = (r^2+1)(r+1)(r-1)$, und schon von selbst klar ist, daſs jeder Factor, sowohl von $r+1$, als von $r-1$ kleiner als r ist, so darf man, um die Factoren von $r^2r^2 - 1$ zu finden, nur die Factoren von r^2+1 suchen.

Zusatz 4. Will man also für den Logarithmum einer jeden Primzahl r eine solche Formel finden, daſs man nur wenige Glieder der Reihe nöthig hat, um denselben auf so viele Decimalziffern als man will, z. B. auf 40, 50 etc. äuſserst geschwinde zu berechnen; so suche man

1. die einfachen Factoren von r^2+1. Ist jeder von diesen kleiner, als r; so gilt für $l.r$ die Formel VI. Ist dieses aber nicht; so setze man die nächst kleinere Primzahl $= x$, und suche
2. die einfachen Factoren, sowohl von $rx+1$ als von $rx-1$. Ist sowohl von den erstern als den leztern jeder kleiner als r; so gilt für $l.r$ die Formel V. Ist dieses aber nicht; so setze man wieder die nächst kleinere Primzahl $= x$, und verfahre eben so, wie vorhin, und setze dieses so lange fort, bis man auf eine von den kleinern Primzahlen x kommt, wo jeder einfache Factor sowohl von $rx+1$, als von $rx-1$ kleiner als r ist.

Z. B. Will man eine Formel für $l.\,71$; so ist $71^2+1=5042$ $=2.2521$, wo 2521 eine Primzahl ist, also findet hier die Formel VI nicht Statt. Man setze also $x=67$; so ist $71.67+1=4758$ $=2.3.13.61$, und $71.67-1=4756=2.2.29.41$, also findet hier die Formel V Statt, und es ist $71^2.67^2-1=2^3.3.13.29.41.61$, und $2.71^2.67^2-1=2(71^2.67^2-1)+1=2.22629048=45258097$, also

$$l.\,71=\tfrac{1}{2}l.\,24.13.29.41.61-l.\,67+\frac{m}{45258097}+\frac{m}{3.4528097^3}+\ldots$$

Will man eine Formel für 83; so ist $83^2+1=6890=10.13.53$, also gilt hier die Formel VI. Da nun $83+1=84=2.2.21$, $83-1$ $=82=2.41$; so ist $83^2.83^2-1=47458320=2^3.3.7.10.13.41.53$, und $2.83^2.83^2-1=2(83^2.83^2-1)+1=2.47458320+1$ $=94916641$, folglich das Duplum $=189833282$, also

$$l.\,83=\tfrac{1}{4}l.\,240.7.13.41.53+\frac{m}{189833282}+\frac{m}{3.189833282^3}+\ldots$$

Will man eine Formel für $l.\,89$; so ist $89^2+1=7922=2.17.233$, also findet hier die Formel VI nicht Statt.

Setzt man $x=83$; so ist $89.83+1=7388=2.2.1847$, also findet hier die Formel V nicht Statt.

Setzt man $x=79$; so ist $89.79+1=7032=2^3.3.293$, also findet die Formel V auch hier nicht Statt.

Setzt man $x=73$; so ist $89.79+1=6498=2.3.3.19.19$, und $89.79-1=6496=2^5.7.29$, also

$$l.\,89=\tfrac{1}{2}l.\,2^6.3^2.7.19^2.29-l.\,73+\frac{m}{84422017}+\frac{m}{3.84422017^3}+\ldots$$

Hat man eine Tafel aller einfachen Factoren der zusammengesetzten Zahlen; so ist, so lange diese hinreicht, das Aufsuchen solcher ausserordentlich bequemen Formeln für die Logarithmen der Primzahlen keine Arbeit zu nennen, sondern eine angenehme Erhohlung. Kommt man aber auf Zahlen, wo dergleichen Tafeln nicht mehr zureichen; so macht zwar das Aufsuchen der einfachen Factoren einige Mühe, die aber in Rücksicht der Wichtigkeit der Sache fer-

tige Rechner nicht scheuen werden, da sie bey weitem derjenigen nicht gleich kommt, welche Brigg und Vlacq zur Berechnung der gemeinen Logarithmen nur auf wenige Decimalziffern anwenden mufsten, und mit so vielem Vergnügen anwandten. Um hiezu fertige Rechner desto mehr aufzumuntern, entschlofs ich mich, da ich vor etwa 5 Jahren auf die Formeln V, VI kam, selbst einen Versuch zu machen, und in einigen Erhohlungsstunden die Logarithmenformeln wenigstens für die Primzahlen von 7 bis 151 aufzusuchen, allein dieses Geschäft zog mich so sehr an, dafs ich es bis zur Primzahl 1009 fortsetzte, und mit Vergnügen viel weiter fortgesetzt hätte, wenn meine anderweitigen Geschäfte es nur nicht unmöglich gemacht hätten. Ich werde am Ende dieses Aufsatzes diese Formeln mittheilen, deren Werth der Augenschein am besten lehren wird.

Lehrsatz 7.

§. 9. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist

$$\text{VII. } l.(r+u) = l.r + m\left(\frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} - \frac{u^4}{4r^4} + \frac{u^5}{5r^5} - + \ldots\right), \text{ und}$$

$$\text{VIII. } l.(r-u) = l.r - m\left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} + \frac{u^4}{4r^4} + \frac{u^5}{5r^5} + \ldots\right).$$

Beweis. Denn man setze $\frac{u}{r} = z$; so ist

$$l.\left(1+\frac{u}{r}\right) = m\left(\frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} - \frac{u^4}{4r^4} + \frac{u^5}{5r^5} - + \ldots\right), \text{ und}$$

$$l.\left(1-\frac{u}{r}\right) = -m\left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} + \frac{u^4}{4r^4} + \frac{u^5}{5r^5} + \ldots\right) \text{ (§. 5.)}$$

Nun ist $l.\left(1+\frac{u}{r}\right) = l.\frac{r+u}{r} = l.(r+u) - l.r$, und

$$l.\left(1-\frac{u}{r}\right) = l.\frac{r-u}{r} = l.(r-u) - l.r,$$

$$\text{also } l.\,(r+u) = l.\,r + m\left(\frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} - \frac{u^4}{4r^4} + - \ldots\right), \text{ und}$$

$$l.\,(r-u) = l.\,r - m\left(\frac{u}{r} + \frac{u^2}{2r^2} + \frac{u^3}{3r^3} + \frac{u^4}{4r^4} + \ldots\right).$$

Zusatz. Diese beyden Formeln sind vortheilhaft, wenn man den Logarithmum einer Zahl verlangt, die schon die logarithmischen Tafeln übersteigt, ohne den Logarithmum der nächst kleinern und grössern Zahl zu wissen. So enthält die Wolframsche Tafel die natürlichen Logarithmen nur für die Zahlen von 1 bis 10009. Gesetzt also, man hätte den natürlichen Logarithmum von 795716324 nöthig; so darf man nur $r = 795700000$, und $u = 16324$ setzen, alsdann ist nach VII

$$\lambda.\,795716324 = \lambda.\,7957 + \lambda.\,10^5 + \frac{16324}{795700000} - \frac{16324^2}{2.\,795700000^2} + - \ldots$$

$$= \lambda.\,7957 + 5\,\lambda.\,10 + 0{,}0000205152694 - 2.\,0{,}0000205152694^2 + \ldots$$

folglich $\lambda.\,7957$	=	8,98180732337753
$5\,\lambda.\,10$	=	11,51292546497020
		205152694
$\lambda.\,795716324$	=	20,49473483987467

wo die 13 ersten Decimalziffern völlig sicher sind, denn wollte man noch das 2te Glied der Reihe subtrahiren, so kommt, wenn man 205152694 durch ihr Duplum, nämlich durch 41030538 dividirt, die erste Ziffer 5 des Quotienten schon unter die letzte 14te Decimalziffer 7, und daher statt 7 nur 2, die aber noch zu klein seyn kann.

Verlangt man für dieselbe Zahl 795716324 den *Briggischen* Logarithmum: so ist, da man hier die Tafel für die Zahlen von 1 bis etwas über 100000 hat, $r = 795710000$, $u = 6324$, also

$$l.\,795716324 = l.\,795710000 + \frac{6324\,m}{795710000} - \frac{6324\,m^2}{2.\,795710000^2} + \ldots$$

wo, ausser der Multiplication des Moduls durch 6324, die Rechnung eben so leicht ist, und das erste Glied der Reihe den Logarithmum schon auf 14 Decimalziffern sicher giebt.

In der Zahl 795716324 ist die erste Ziffer, welche die Tafel der natürlichen Logarithmen übersteigt, klein, nämlich 1. Hier ist also die Formel VII bequemer. Nimmt man hingegen eine Zahl, wo gedachte erste Ziffer gröſser als 5 ist; so ist die Formel VIII bequemer. Gesetzt z. B. man verlangt den natürlichen Logarithmum von 795698467; so ist, wenn man dieselbe von 795700000 abzieht, die Differenz $= 1533$. Man setze also $r = 795700000$, und $u = 1533$; so ist nach VIII.

$$\lambda.\, 795698467 = \lambda.\, 7957 + 5\,\lambda.\, 10 - \frac{1533}{795700000} - \frac{1533^2}{2.795700000^2} + \ldots$$

So vortheilhaft indessen die Formeln VII, VIII sind; so sind dennoch die folgenden IX, X noch weit bequemer.

Lehrsatz 8.

§. 10. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist; ist

$$\text{IX. } l.\,(r+u) = l.\,r + 2m\left(\frac{u}{2r+u} + \frac{u^3}{3(2r+u)^3} + \frac{u^5}{5(2r+u)^5} + \ldots\right),$$

und

$$\text{X. } l.\,(r-u) = l.\,r - 2m\left(\frac{u}{2r-u} + \frac{u^3}{3(2r-u)^3} + \frac{u^5}{5(2r-u)^5} + \ldots\right).$$

Beweis. Denn $l.\,\frac{r+u}{r} = l.\,(r+u) - l.\,r$. Nun setze man $\frac{r+u}{r} = \frac{1+z}{1-z}$; so ist $r+u-rz-uz = r+rz$, folglich $u = (2r+u)z$, mithin $z = \frac{u}{2r+u}$. Also ist

$$l.\,(r+u) - l.\,r = 2m\left(\frac{u}{2r+u} + \frac{u^3}{3(2r+u)^3} + \frac{u^5}{5(2r+u)^5} + \ldots\right) \text{ (§. 6.)},$$

mithin

$$l.\,(r+u) = l.\,r + 2m\left(\frac{u}{2r+u} + \frac{u^3}{3(2r+u)^3} + \frac{u^5}{5(2r+u)^5} + \ldots\right),$$

$$l.\,(r-u) = l.\,r - 2m\left(\frac{u}{2r-u} + \frac{u^3}{3(2r-u)^3} + \frac{u^5}{5(2r-u)^5} + \ldots\right).$$

Zusatz. Da diese beyden Reihen weit stärker convergiren, als die in den Formel VII, VIII; so sind sie, besonders da, wo man für den Logarithmum viele Decimalziffern verlangt, diesen weit vorzuziehen, und daher nicht nur sehr brauchbar, wenn man Logarithmen verlangt, welche die Tafeln übersteigen, sondern überhaupt in allen Fällen, wo man einen Logarithmum verlangt, ohne den nächst vorhergehenden und folgenden zu wissen. Wollte man hingegen diese Formeln zur Anfertigung logarithmischer Tafeln für die ganzen Zahlen gebrauchen; und nach denselben aus den vorhergehenden Logarithmen die nachfolgenden berechnen; so würde das Verfahren mühsamer seyn, als das nach der Formel IV, §. 7., in welcher die Reihe weit schneller convergirt.

Lehrsatz 9.

§. 11. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist die Zahl

$$y = 1 + \frac{l.\,y}{m} + \frac{l.\,y^2}{2\,m^2} + \frac{l.\,y^3}{2.3\,m^3} + \frac{l.\,y^4}{2.3.4\,m^4} + \frac{l.\,y^5}{2.3.4.5\,m^5} + \ldots$$

Beweis. Denn da $y = \left(1 + \frac{l.\,y}{m\,\infty}\right)^{\infty}$ (§. 1. Z. *n.* 4.); so ist

$$y = 1 + \frac{\infty\, l.\,y}{1\,m\,\infty} + \frac{\infty.\,\infty - 1.\,l.\,y^2}{1.2\,m^2\,\infty^2} + \frac{\infty.\,\infty - 1.\,\infty - 2.\,l.\,y^3}{1.2.3\,m^3\,\infty^3} + \ldots$$

Nun ist $\infty = \infty - 1 = \infty - 2 = \infty - 3$ u. s. w. Also ist

$$y = 1 + \frac{l.\,y}{m} + \frac{l.\,y^2}{2\,m^2} + \frac{l.\,y^3}{2.3\,m^3} + \frac{l.\,y^4}{2.3.4\,m^4} + \ldots$$

Zusatz 1. Mittelst dieser Reihe kann man also aus einem gegebenen Logarithmo die ihm zugehörige Zahl finden, aber wenn die Kennziffer über 0 ist, sehr mühsam, und wenn jene sehr groſs ist, gar nicht, weil die Reihe alsdenn nicht convergirt. Indessen wird sie bequemer, wenn man die Kennziffer des gegebenen Logarithmen in 0 verwandelt, und zur gefundenen Zahl nachher so viel Nullen hinsetzt, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmen Einer enthält. Indessen findet diese Erleichterung bloſs bey den *Briggischen* Logarithmen Statt.

Zusatz 2. Diejenige Zahl y, deren Logarithmus $l.y$ dem Modul m gleich ist, die die Grundzahl a des natürlichen Systems (§. 4. Z. 6.) ist

$$= 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} = 2,718281828 \ldots,$$

also eben so, wie dieselbe §. 4. Z. 1. gefunden worden.

Lehrsatz 10.

§. 12. In jedem System, dessen Modul $= m$ ist, ist jede Zahl

$$y = u + \frac{l.y - l.u}{m} + \frac{l.y^2 - l.u^2}{2m^2} + \frac{l.y^3 - l.u^3}{2.3m^3} + \frac{l.y^4 - l.u^4}{2.3.4m^4} + \ldots$$

Beweis. Denn $y = 1 + \frac{l.y}{m} + \frac{l.y^2}{2m^2} + \frac{l.y^3}{2.3m^3} + \frac{l.y^4}{2.3.4m^4} + \ldots$

und $u = 1 + \frac{l.u}{m} + \frac{l.u^2}{2m^2} + \frac{l.u^3}{2.3m^3} + \frac{l.u^4}{2.3.4m^4} + \ldots$ (§. 11.),

folglich $y - u = \frac{l.y - l.u}{m} + \frac{l.y^2 - l.u^2}{2m^2} + \frac{l.y^3 - l.u^3}{2.3m^3} + \ldots$

also $y = u + \frac{l.y - l.u}{m} + \frac{l.y^2 - l.u^2}{2m^2} + \frac{l.y^3 - l.u^3}{2.3m^3} + \ldots$

Zusatz. Mittelst dieser Reihe kann man aus jedem gegebenen Logarithmo, welcher in den logarithm. Tafeln nicht genau befindlich ist, die ihm zugehörige Zahl bequem finden, wenn man den zunächst kleinern Logarithmum in den Tafeln $= l.u$ setzt, z. B. gesetzt der gegebene natürliche Logarithmus sey $= 9,0895837 = l.y$ so ist in den Tafeln der zunächst kleinere für die Zahl $8861 = 9,0894149 = l.u$, $l.y - l.u = 0,0001686$, wo also die Reihe schon sehr convergirt.

Wenn man auf diese Art die Zahl, welche einem Logarithmo der in den Tafeln nicht genau befindlich ist, zugehört, wirklich berechnet; so läſst sich dadurch prüfen, in wiefern die gewöhnliche Annahme, daſs die Decimaltheile zwischen zwey nächsten ganzen Zahlen, den Decimaltheilen zwischen ihren Logarithmen, beynahe einander proportional sind, richtig ist.

Zu diesem Behuf sind indessen die Formeln IX, X §. 10. weit bequemer.

Formeln

mittelst welcher sich aus den Logarithmen von 2 und 5 die Logarithmen der übrigen Primzahlen mit der grösseſten Leichtigkeit auf 30, 40, 50 und mehrere Decimalziffern berechnen lassen.

$$l.\ 3 = \tfrac{1}{4}\, l.\ 80 + \frac{m}{322} + \frac{m}{3 \cdot 322^3} + \frac{m}{5 \cdot 322^5} + \frac{m}{7 \cdot 322^7} + \ldots$$

$$l.\ 7 = \tfrac{1}{4}\, l.\ 2400 + \frac{m}{9602} + \frac{m}{3 \cdot 9602^3} + \frac{m}{5 \cdot 9602^5} + \frac{m}{7 \cdot 9602^7} + \ldots$$

$$l.\ 11 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 9800 - l.\ 9 + \frac{m}{19601} + \frac{m}{3 \cdot 19601^3} + \frac{m}{5 \cdot 19601^5} + \ldots$$

$$l.\ 13 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 1600 \cdot 77 - l.\ 27 + \frac{m}{246401} + \frac{m}{3 \cdot 246401^3} + \frac{m}{5 \cdot 246401^5} + \ldots$$

$$l.\ 17 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 2600 - l.\ 3 + \frac{m}{5201} + \frac{m}{3 \cdot 5201^3} + \frac{m}{5 \cdot 5201^5} + \ldots$$

$$l.\ 19 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 480 \cdot 7 \cdot 13 - l.\ 11 + \frac{m}{87361} + \frac{m}{3 \cdot 87361^3} + \frac{m}{5 \cdot 87361^5} + \ldots$$

$$l.\ 23 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 240 \cdot 49 \cdot 13 - l.\ 17 + \frac{m}{305761} + \frac{m}{3 \cdot 305761^3} + \frac{m}{5 \cdot 305761^5} + \ldots$$

$$l.\ 29 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 1200 \cdot 11 \cdot 23 - l.\ 19 + \frac{m}{607201} + \frac{m}{3 \cdot 607201^3} + \frac{m}{5 \cdot 607201^5} + \ldots$$

$$l.\ 31 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 24 \cdot 77 \cdot 13 - l.\ 5 + \frac{m}{48049} + \frac{m}{3 \cdot 48049^3} + \frac{m}{5 \cdot 48049^5} + \ldots$$

$$l.\ 37 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 384 \cdot 99 \cdot 13 - l.\ 19 + \frac{m}{988417} + \frac{m}{3 \cdot 988417^3} + \frac{m}{5 \cdot 988417^5} + \ldots$$

$$l.\ 41 = \tfrac{1}{4}\, l.\ 3360 \cdot 29 \cdot 29 + \frac{m}{11303042} + \frac{m}{3 \cdot 11303042^3} + \frac{m}{5 \cdot 11303042^5} + \ldots$$

$$l.\ 43 = \tfrac{1}{4}\, l.\ 1200 \cdot 77 \cdot 37 + \frac{m}{13675202} + \frac{m}{3 \cdot 13675202^3} + \frac{m}{5 \cdot 13675202^5} + \ldots$$

$$l.\ 47 = \tfrac{1}{4}\, l.\ 960 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 + \frac{m}{19518722} + \frac{m}{3 \cdot 19518722^3} + \frac{m}{5 \cdot 19518722^5} + \ldots$$

$$l.\ 53 = \tfrac{1}{2}\, l.\ 480 \cdot 23 \cdot 43 - l.\ 13 + \frac{m}{949441} + \frac{m}{3 \cdot 949441^3} + \frac{m}{5 \cdot 949441^5} + \ldots$$

$$l.\,59 = \tfrac{1}{2}\,l.\,120.11.11.13.31 - l.\,41 + \frac{m}{11703121} + \frac{m}{3.11703121^3} + \frac{m}{5.11703121^5} + \ldots$$

$$l.\,61 = \tfrac{1}{2}\,l.\,384.19.23.41 - l.\,43 + \frac{m}{13760257} + \frac{m}{3.13760257^3} + \frac{m}{5.13760257^5} + \ldots$$

$$l.\,67 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3360.31.59 - l.\,37 + \frac{m}{12290881} + \frac{m}{3.12290881^3} + \frac{m}{5.12290881^5} + \ldots$$

$$l.\,71 = \tfrac{1}{2}\,l.\,312.29.41.61 - l.\,67 + \frac{m}{45258097} + \frac{m}{3.45258097^3} + \ldots$$

$$l.\,73 = \tfrac{1}{4}\,l.\,1440.13.37.41 + \frac{m}{113592962} + \frac{m}{3.113592962^3} + \ldots$$

$$l.\,79 = \tfrac{1}{2}\,l.\,7200.49.17 - l.\,31 + \frac{m}{11995201} + \frac{m}{3.11995201^3} + \ldots$$

$$l.\,83 = \tfrac{1}{4}\,l.\,1680.13.41.53 + \frac{m}{189833282} + \frac{m}{3.189833282^3} + \ldots$$

$$l.\,89 = \tfrac{1}{2}\,l.\,4032.19.19.29 - l.\,73 + \frac{m}{84422017} + \frac{m}{3.84422017} + \ldots$$

$$l.\,97 = \tfrac{1}{2}\,l\,4200.11.23.61 - l.\,83 + \frac{m}{129637201} + \frac{m}{3.129637201^3} + \ldots$$

$$l.\,101 = \tfrac{1}{2}\,l.\,552.31.71.79 - l.\,97 + \frac{m}{191962417} + \frac{m}{3.191962417^3} + \ldots$$

$$l.\,103 = \tfrac{1}{2}\,l.\,4200.17.23.29 - l.\,67 + \frac{m}{95247601} + \frac{m}{3.95247601^3} + \ldots$$

$$l.\,107 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1200.13.23.59 - l.\,43 + \frac{m}{42338401} + \frac{m}{3.42338401^3} + \ldots$$

$$l.\,109 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1800.49.11.97 - l.\,89 + \frac{m}{188218801} + \frac{m}{3.188218801^3} + \ldots$$

$$l.\,113 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2640.23.23.97 - l\,103 + \frac{m}{270932641} + \frac{m}{3.270932641^3} + \ldots$$

$$l.\,127 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3360.65.23.41 - l.\,113 + \frac{m}{411902401} + \frac{m}{3.411902401^3} + \ldots$$

$$l.\,131 = \tfrac{1}{2}\,l.\,240.121.59.119 - l.\,109 + \frac{m}{407779681} + \ldots$$

$$l.\,137 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2880.49.17.83 - l.\,103 + \frac{m}{398240641} + \ldots$$

$$l.\,139 = \tfrac{1}{2}\,l.\,528.13.13.37.67 - l.\,107 + \frac{m}{442412257} + \ldots$$

$$l.\,149 = \tfrac{1}{2}\,l.\,720.385.19.43 - l.\,101 + \frac{m}{452944801} + \ldots$$

$$l.\,151 = \tfrac{1}{2}\,l.\,384.567.11.101 - l.\,103 + \frac{m}{483791617} + \ldots$$

$$l.\,157 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2520.17.31.41 - l.\,47 + \frac{m}{108899281} + \ldots$$

$$l.\,163 = \tfrac{1}{2}\,l.\,8640.17.19.109 - l.\,107 + \frac{m}{608376961} + \ldots$$

$$l.\,167 = \tfrac{1}{2}\,l.\,4160.99.31.41 - l.\,137 + \frac{m}{1046897281} + \ldots$$

$$l.\,173 = \tfrac{1}{2}\,l.\,35640.59.151 - l.\,103 + \frac{m}{635033521} + \ldots$$

$$l.\,179 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2016.19.61.157 - l.\,107 + \frac{m}{733674817} + \ldots$$

$$l.\,181 = \tfrac{1}{2}\,l.\,64800.97.167 - l.\,179 + \frac{m}{2099390401} + \ldots$$

$$l.\,191 = \tfrac{1}{4}\,l.\,65280.19.29.37 + \frac{m}{5323453442} + \ldots$$

$$l.\,193 = \tfrac{1}{4}\,l.\,96000.97.149 + \frac{m}{5549952002} + \ldots$$

$$l.\,197 = \tfrac{1}{2}\,l.\,888.67.107.139 - l.\,151 + \frac{m}{1769768017} + \ldots$$

$$l.\,199 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1320.343.19.79 - l.\,131 + \frac{m}{1359185521} + \ldots$$

$$l.\,211 = \tfrac{1}{4}\,l.\,1680\,.\,53\,.\,113\,.\,197 + \frac{m}{7928477762} + \ldots$$

$$l.\,223 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1104\,.\,61\,.\,113\,.\,149 - l.\,151 + \frac{m}{22677418857} + \ldots$$

$$l.\,227 = \tfrac{1}{2}\,l.\,71280\,.\,103\,.\,173 - l.\,157 + \frac{m}{2540276641} + \ldots$$

$$l.\,229 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2016\,.\,19\,.\,19\,.\,47\,.\,79 - l.\,227 + \frac{m}{5404464577} + \ldots$$

$$l.\,233 = \tfrac{1}{4}\,l.\,18720\,.\,29\,.\,61\,.\,89 + \frac{m}{11789182082} + \ldots$$

$$l.\,239 = \tfrac{1}{4}\,l.\,6720\,.\,13\,.\,13\,.\,13\,.\,13\,.\,17 + \frac{m}{13051234562} + \ldots$$

$$l.\,241 = \tfrac{1}{2}\,l.\,7560\,.\,19\,.\,47\,.\,191 - l.\,149 + \frac{m}{2578912561} + \ldots$$

$$l.\,251 = \tfrac{1}{2}\,l.\,22680\,.\,209\,.\,67 - l.\,71 + \frac{m}{635176081} + \ldots$$

$$l.\,257 = \tfrac{1}{2}\,l.\,864\,.\,49\,.\,31\,.\,37\,.\,79 - l.\,241 + \frac{m}{7672383937} + \ldots$$

$$l.\,263 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3216\,.\,209\,.\,43\,.\,139 - l.\,241 + \frac{m}{8034809377} + \ldots$$

$$l.\,269 = \tfrac{1}{2}\,l.\,63360\,.\,11\,.\,31\,.\,211 - l.\,251 + \frac{m}{9117630721} + \ldots$$

$$l.\,271 = \tfrac{1}{2}\,l.\,72900\,.\,574\,.\,127 - l.\,269 + \frac{m}{10628528401} + \ldots$$

$$l.\,277 = \tfrac{1}{2}\,l.\,32760\,.\,37\,.\,37\,.\,113 - l.\,257 + \frac{m}{10135747441} + \ldots$$

$$l.\,281 = \tfrac{1}{2}\,l.\,65520\,.\,23\,.\,41\,.\,73 - l.\,239 + \frac{m}{9020662561} + \ldots$$

$$l.\,283 = \tfrac{1}{2}\,l.\,48240\,.\,13\,.\,41\,.\,239 - l.\,277 + \frac{m}{12290297761} + \ldots$$

$l. 293 = \frac{1}{2} l. 58800 . 17 . 73 . 101 + \frac{m}{29480203202} + \ldots$

$l. 307 = \frac{1}{2} l. 4464 . 37 . 157 . 263 - l. 269 + \frac{m}{13639903777} + \ldots$

$l. 311 = \frac{1}{2} l. 5640 . 73 . 89 . 191 - l. 269 + \frac{m}{13997656561} + \ldots$

$l. 313 = \frac{1}{4} l. 6240 . 97 . 101 . 157 + \frac{m}{38391699842} + \ldots$

$l. 317 = \frac{1}{2} l. 2856 . 71 . 107 . 269 - l. 241 + \frac{m}{11673003217} + \ldots$

$l. 331 = \frac{1}{2} l. 1056 . 29 . 31 . 73 . 149 - l. 307 + \frac{m}{20652029377} + \ldots$

$l. 337 = \frac{1}{4} l. 87360 . 13 . 41 . 277 + \frac{m}{51591671042} + \ldots$

$l. 347 = \frac{1}{2} l. 1620000 . 77 . 97 - l. 317 + \frac{m}{24199560001} + \ldots$

$l. 349 = \frac{1}{2} l. 1944 . 217 . 121 . 271 - l. 337 + \frac{m}{27665635537} + \ldots$

$l. 353 = \frac{1}{2} l. 199800 . 199 . 251 - l. 283 + \frac{m}{19959620401} + \ldots$

$l. 359 = \frac{1}{2} l. 8360 . 187 . 67 . 197 - l. 349 + \frac{m}{31395669361} + \ldots$

$l. 367 = \frac{1}{2} l. 142200 . 13 . 31 . 283 - l. 347 + \frac{m}{32435535601} + \ldots$

$l. 373 = \frac{1}{2} l. 1584 . 19 . 19 . 19 . 23 . 61 - l. 331 + \frac{m}{30486224737} + \ldots$

$l. 379 = \frac{1}{2} l. 459 . 736 . 79 . 143 - l. 163 + \frac{m}{7632795457} + \ldots$

$l. 383 = \frac{1}{2} l. 4320 . 133 . 137 . 251 - l. 367 + \frac{m}{39514789441} + \ldots$

$$l.\,389 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1512\,.\,17\,.\,31\,.\,89\,.\,313 - l.\,383 + \frac{m}{44394252337} + \ldots$$

$$l.\,397 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3504\,.\,299\,.\,73\,.\,251 - l.\,349 + \frac{m}{38393867617} + \ldots$$

$$l.\,401 = \tfrac{1}{4}\,l.\,196800\,.\,37\,.\,53\,.\,67 + \frac{m}{1034278464O2} + \ldots$$

$$l.\,409 = \tfrac{1}{2}\,l.\,18480\,.\,247\,.\,71\,.\,83 - l.\,401 + \frac{m}{53797904161} + \ldots$$

$$l.\,419 = \tfrac{1}{2}\,l.\,319200\,.\,199\,.\,397 - l.\,379 + \frac{m}{50435515201} + \ldots$$

$$l.\,421 = \tfrac{1}{4}\,l.\,21840\,.\,17\,.\,211\,.\,401 + \frac{m}{125657488322} + \ldots$$

$$l.\,431 = \tfrac{1}{4}\,l.\,8640\,.\,43\,.\,293\,.\,317 + \frac{m}{138028596482} + \ldots$$

$$l.\,433 = \tfrac{1}{2}\,l.\,41400\,.\,37\,.\,101\,.\,191 - l.\,397 + \frac{m}{59099907601} + \ldots$$

$$l.\,439 = \tfrac{1}{2}\,l.\,28560\,.\,53\,.\,67\,.\,353 - l.\,431 + \frac{m}{71600091361} + \ldots$$

$$l.\,443 = \tfrac{1}{4}\,l.\,6630000\,.\,37\,.\,157 + \frac{m}{154054680002} + \ldots$$

$$l.\,449 = \tfrac{1}{2}\,l.\,29040\,.\,403\,.\,277 - l.\,401 + \frac{m}{64835284801} + \ldots$$

$$l.\,457 = \tfrac{1}{2}\,l.\,6336\,.\,1183\,.\,59\,.\,79 - l.\,409 + \frac{m}{69872939137} + \ldots$$

$$l.\,461 = \tfrac{1}{2}\,l.\,35280\,.\,11\,.\,219\,.\,439 - l.\,419 + \frac{m}{74620798561} + \ldots$$

$$l.\,463 = \tfrac{1}{4}\,l.\,73920\,.\,321\,.\,29\,.\,97 + \frac{m}{183816272642} + \ldots$$

$$l.\,467 = \tfrac{1}{4}\,l.\,9360\,.\,113\,.\,193\,.\,233 + \frac{m}{190251247682} + \ldots$$

$$l.\,479 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2592 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 83 \cdot 167 - l.\,463 + \frac{m}{98370075457} + \dots$$

$$l.\,487 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1704 \cdot 139 \cdot 367 \cdot 479 - l.\,419 + \frac{m}{83275253617} + \dots$$

$$l.\,491 = \tfrac{1}{2}\,l.\,24360 \cdot 73 \cdot 151 \cdot 181 - l.\,449 + \frac{m}{97204341361} + \dots$$

$$l.\,499 = \tfrac{1}{4}\,l.\,4758000 \cdot 83 \cdot 157 + \frac{m}{248005992002} + \dots$$

$$l.\,503 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3552 \cdot 247 \cdot 149 \cdot 373 - l.\,439 + \frac{m}{97520294977} + \dots$$

$$l.\,509 = \tfrac{1}{4}\,l.\,4080 \cdot 127 \cdot 281 \cdot 461 + \frac{m}{268491858242} + \dots$$

$$l.\,521 = \tfrac{1}{2}\,l.\,6480 \cdot 361 \cdot 149 \cdot 157 - l.\,449 + \frac{m}{109445554081} + \dots$$

$$l.\,523 = \tfrac{1}{2}\,l.\,88200 \cdot 23 \cdot 113 \cdot 283 - l.\,487 + \frac{m}{129745198801} + \dots$$

$$l.\,541 = \tfrac{1}{2}\,l.\,34800 \cdot 43 \cdot 197 \cdot 211 - l.\,461 + \frac{m}{124401717601} + \dots$$

$$l.\,547 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3408 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 521 - l.\,541 + \frac{m}{175145578657} + \dots$$

$$l.\,557 = \tfrac{1}{4}\,l.\,4464 \cdot 2125 \cdot 73 \cdot 139 + \frac{m}{385017768002} + \dots$$

$$l.\,563 = \tfrac{1}{2}\,l.\,184800 \cdot 13 \cdot 151 \cdot 239 - l.\,523 + \frac{m}{173400427201} + \dots$$

$$l.\,569 = \tfrac{1}{2}\,l.\,5376000 \cdot 847 \cdot 193 - l.\,521 + \frac{m}{175764019201} + \dots$$

$$l.\,571 = \tfrac{1}{2}\,l.\,7728 \cdot 83 \cdot 257 \cdot 541 - l.\,523 + \frac{m}{178363337377} + \dots$$

$$l.\,577 = \tfrac{1}{4}\,l.\,11520 \cdot 169 \cdot 289 \cdot 197 + \frac{m}{443366876162} + \dots$$

$$l.\,587 = \tfrac{1}{2}\,l.\,21120\,.\,203\,.\,136\,.\,173 - l.\,547 + \frac{m}{206196291841} + \ldots$$

$$l.\,593 = \tfrac{1}{4}\,l.\,475200\,.\,481\,.\,541 + \frac{m}{494628076802} + \ldots$$

$$l.\,599 = \tfrac{1}{4}\,l.\,31200\,.\,391\,.\,61\,.\,173 + \frac{m}{514952630402} + \ldots$$

$$l.\,601 = \tfrac{1}{2}\,l.\,9912\,.\,187\,.\,199\,.\,293 - l.\,547 + \frac{m}{216149180017} + \ldots$$

$$l.\,607 = \tfrac{1}{2}\,l.\,13320\,.\,107\,.\,281\,.\,317 - l.\,587 + \frac{m}{253912206961} + \ldots$$

$$l.\,613 = \tfrac{1}{2}\,l.\,66360\,.\,97\,.\,137\,.\,157 - l.\,607 + \frac{m}{27690342561} + \ldots$$

$$l.\,617 = \tfrac{1}{2}\,l.\,98280\,.\,19\,.\,199\,.\,353 - l.\,587 + \frac{m}{262347256081} + \ldots$$

$$l.\,619 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3384\,.\,17\,.\,103\,.\,103\,.\,239 - l.\,617 + \frac{m}{2917303555857} + \ldots$$

$$l.\,631 = \tfrac{1}{2}\,l.\,14520\,.\,139\,.\,269\,.\,281 - l.\,619 + \frac{m}{305119533841} + \ldots$$

$$l.\,641 = \tfrac{1}{2}\,l.\,20880\,.\,83\,.\,257\,.\,331 - l.\,599 + \frac{m}{294849027361} + \ldots$$

$$l.\,643 = \tfrac{1}{2}\,l.\,6240\,.\,179\,.\,367\,.\,379 - l.\,613 + \frac{m}{310722634561} + \ldots$$

$$l.\,647 = \tfrac{1}{2}\,l.\,15120\,.\,199\,.\,203\,.\,241 - l.\,593 + \frac{m}{294406872481} + \ldots$$

$$l.\,653 = \tfrac{1}{2}\,l.\,15480\,.\,59\,.\,281\,.\,347 - l.\,457 + \frac{m}{178110186481} + \ldots$$

$$l.\,659 = \tfrac{1}{4}\,l.\,18480\,.\,17\,.\,47\,.\,53\,.\,241 + \frac{m}{754399947842} + \ldots$$

$$l.\,661 = \tfrac{1}{2}\,l.\,5088\,.\,301\,.\,239\,.\,509 - l.\,653 + \frac{m}{372614093377} + \ldots$$

$$l.\,673 = \tfrac{1}{2}\,l.\,6840.181.257.607 - l.\,653 + \frac{m}{386266003921} + \dots$$

$$l.\,677 = \tfrac{1}{2}\,l.\,7224.29.29.139.223 - l.\,641 + \frac{m}{376637355697} + \dots$$

$$l.\,683 = \tfrac{1}{2}\,l.\,588000.37.41.223 - l.\,653 + \frac{m}{397830216001} + \dots$$

$$l.\,691 = \tfrac{1}{2}\,l.\,696.19.179.211.433 - l.\,673 + \frac{m}{432529983697} + \dots$$

$$l.\,701 = \tfrac{1}{4}\,l.\,982800.17.97.149 + \frac{m}{965899771202} + \dots$$

$$l.\,709 = \tfrac{1}{2}\,l.\,579600.13.103.283 - l.\,661 + \frac{m}{439263770401} + \dots$$

$$l.\,719 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3552.221.503.593 - l.\,673 + \frac{m}{468293257537} + \dots$$

$$l.\,727 = \tfrac{1}{2}\,l.\,7080.559.97.631 - l.\,677 + \frac{m}{484480336081} + \dots$$

$$l.\,733 = \tfrac{1}{2}\,l.\,17760.343.253.131 - l.\,613 + \frac{m}{403793100481} + \dots$$

$$l.\,739 = \tfrac{1}{2}\,l.\,5256.19.67.107.193 - l.\,503 + \frac{m}{276347056177} + \dots$$

$$l.\,743 = \tfrac{1}{4}\,l.\,890400.31.61.181 + \frac{m}{1219032393602} + \dots$$

$$l.\,751 = \tfrac{1}{2}\,l.\,73080.37.229.349 - l.\,619 + \frac{m}{432206374321} + \dots$$

$$l.\,757 = \tfrac{1}{4}\,l.\,75600.73.157.379 + \frac{m}{1313540625602} + \dots$$

$$l.\,761 = \tfrac{1}{2}\,l.\,1593000.629.251 - l.\,659 + \frac{m}{503002494001} + \dots$$

$$l.\,769 = \tfrac{1}{2}\,l.\,15960.697.151.173 - l.\,701 + \frac{m}{581190773521} + \dots$$

$$l.\,773 = \tfrac{1}{2}\,l.\,9576\,.\,781\,.\,103\,.\,401 - l.\,719 + \frac{m}{617798378737} + \ldots$$

$$l.\,787 = \tfrac{1}{4}\,l.\,31440\,.\,197\,.\,241\,.\,257 + \frac{m}{1534471832642} + \ldots$$

$$l.\,797 = \tfrac{1}{2}\,l.\,25080\,.\,767\,.\,23\,.\,601 - l.\,647 + \frac{m}{531808408561} + \ldots$$

$$l.\,809 = \tfrac{1}{2}\,l.\,65520\,.\,799\,.\,23\,.\,281 - l.\,719 + \frac{m}{676682304481} + \ldots$$

$$l.\,811 = \tfrac{1}{2}\,l.\,17280\,.\,329\,.\,139\,.\,409 - l.\,701 + \frac{m}{646409514241} + \ldots$$

$$l.\,821 = \tfrac{1}{2}\,l.\,15360\,.\,287\,.\,553\,.\,151 - l.\,739 + \frac{m}{736215889921} + \ldots$$

$$l.\,823 = \tfrac{1}{2}\,l.\,504\,.\,289\,.\,137\,.\,137\,.\,167 - l.\,821 + \frac{m}{913095032977} + \ldots$$

$$l.\,827 = \tfrac{1}{2}\,l.\,5040\,.\,37\,.\,47\,.\,97\,.\,461 - l.\,757 + \frac{m}{783849659041} + \ldots$$

$$l.\,829 = \tfrac{1}{2}\,l.\,364800\,.\,2321\,.\,311 - l.\,619 + \frac{m}{526647897601} + \ldots$$

$$l.\,839 = \tfrac{1}{2}\,l.\,15120\,.\,377\,.\,103\,.\,709 - l.\,769 + \frac{m}{832542852961} + \ldots$$

$$l.\,853 = \tfrac{1}{4}\,l.\,48720\,.\,793\,.\,71\,.\,193 + \frac{m}{2117659427522} + \ldots$$

$$l.\,857 = \tfrac{1}{4}\,l.\,976800\,.\,1391\,.\,397 + \frac{m}{2157661334402} + \ldots$$

$$l.\,859 = \tfrac{1}{2}\,l.\,3696\,.\,3599\,.\,113\,.\,229 - l.\,683 + \frac{m}{688426739617} + \ldots$$

$$l.\,863 = \tfrac{1}{4}\,l.\,17280\,.\,221\,.\,337\,.\,431 + \frac{m}{2218723453442} + \ldots$$

$$l.\,877 = \tfrac{1}{2}\,l.\,8832\,.\,4187\,.\,103\,.\,149 - l.\,859 + \frac{m}{1135051351297} + \ldots$$

$$l.\,881 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2520 \cdot 5251 \cdot 173 \cdot 223 - l.\,811 + \frac{m}{1020994778161} + \cdots$$

$$l.\,883 = \tfrac{1}{2}\,l.\,12390000 \cdot 71 \cdot 563 - l.\,797 + \frac{m}{990530940001} + \cdots$$

$$l.\,887 = \tfrac{1}{2}\,l.\,38220000 \cdot 73 \cdot 191 - l.\,823 + \frac{m}{1065802920001} + \cdots$$

$$l.\,907 = \tfrac{1}{2}\,l.\,23040 \cdot 371 \cdot 581 \cdot 89 - l.\,733 + \frac{m}{884000517121} + \cdots$$

$$l.\,911 = \tfrac{1}{4}\,l.\,6720 \cdot 1189 \cdot 247 \cdot 349 + \frac{m}{2755075464962} + \cdots$$

$$l.\,919 = \tfrac{1}{4}\,l.\,4320 \cdot 3737 \cdot 113 \cdot 391 + \frac{m}{2853133130882} + \cdots$$

$$l.\,929 = \tfrac{1}{2}\,l.\,187200 \cdot 3053 \cdot 893 - l.\,769 + \frac{m}{1020737577601} + \cdots$$

$$l.\,937 = \tfrac{1}{2}\,l.\,2679000 \cdot 1457 \cdot 173 - l.\,877 + \frac{m}{1350542838001} + \cdots$$

$$l.\,941 = \tfrac{1}{2}\,l.\,75480 \cdot 41 \cdot 337 \cdot 659 - l.\,881 + \frac{m}{1374551636881} + \cdots$$

$$l.\,947 = \tfrac{1}{2}\,l.\,22680 \cdot 323 \cdot 283 \cdot 293 - l.\,823 + \frac{m}{1214869486321} + \cdots$$

$$l.\,953 = \tfrac{1}{2}\,l.\,11880 \cdot 703 \cdot 181 \cdot 359 - l.\,773 + \frac{m}{1085362431121} + \cdots$$

$$l.\,967 = \tfrac{1}{2}\,l.\,40560 \cdot 31 \cdot 673 \cdot 823 - l.\,863 + \frac{m}{1392850598881} + \cdots$$

$$l.\,971 = \tfrac{1}{2}\,l.\,42120 \cdot 217 \cdot 181 \cdot 373 - l.\,809 + \frac{m}{1234143041041} + \cdots$$

$$l.\,977 = \tfrac{1}{2}\,l.\,59640 \cdot 169 \cdot 169 \cdot 431 - l.\,877 + \frac{m}{1468311870481} + \cdots$$

$$l.\,983 = \tfrac{1}{2}\,l.\,205800 \cdot 667 \cdot 59 \cdot 107 - l.\,947 + \frac{m}{1733153343601} + \cdots$$

$$l.991 = \frac{1}{2} l.5904 \cdot 1501 \cdot 149 \cdot 653 - l.937 + \frac{m}{1724473346977} + \ldots$$

$$l.997 = \frac{1}{2} l.42840 \cdot 559 \cdot 113 \cdot 289 - l.887 + \frac{m}{1564110933841} + \ldots$$

$$l.1009 = \frac{1}{2} l.69960 \cdot 67 \cdot 281 \cdot 521 - l.821 + \frac{m}{1372456670641} + \ldots$$

Bemerkungen über vorstehende Formeln.

1. Für die Richtigkeit dieser Formeln habe ich alle mögliche Sorge getragen. Will man sie indessen prüfen; so ist hiebey bloſs folgendes zu bemerken: Ist darin der Logarithmus einer Zahl zu subtrahiren; so ist diese der gefundene Multiplicator x für die gegebene Primzahl r §. 8. V, also muſs hier das Product der Factoren hinter $\frac{1}{2} l = r^2 x^2 - 1$, und der Divisor des ersten Gliedes der Reihe $= 2 r^2 x^2 - 1$ seyn, z. B. in der Formel für $l.$ 23 ist $l.$ 17 zu subtrahiren, also $240 \cdot 49 \cdot 13 = 23^2 \cdot 17^2 - 1 = 152880$, und $305761 = 2 \cdot 152881 - 1$.

Ist hingegen kein Logarithmus zu subtrahiren; so ist der gefundene Multiplicator für die gegebene Primzahl r die Zahl r selbst, also muſs hier das Product der Factoren hinter $\frac{1}{4} l = r^4 - 1$, und der Divisor des ersten Gliedes der Reihe $= 2 \cdot (2 r^4 - 1)$ seyn (§. 8. VI), z. B. in der Formel für $l.$ 41 ist $3360 \cdot 29 \cdot 29 = 41^4 - 1 = 2825760$, und $11303042 = 2 (2 \cdot 2825761 - 1)$.

2. Um die Leichtigkeit zu erkennen, mit welcher sich die Logarithmen durch diese Formeln berechnen lassen, darf man zuerst nur folgenden Vortheil bemerken: Will man die Logarithmen auf 7 bis 12 Decimalziffern; so erhält man die Logarithmen der *Primzahlen* auf eben die Art, wie man gewöhnlich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen sucht, nämlich durch bloſse *Addition* und *Subtraction* schon gefundener Logarithmen. Höchstens darf man zu diesem Zwecke bey den ersten kleinern Primzahlen nur noch einige wenige

Ziffern vom ersten Quotienten der Reihe zu Hülfe nehmen. So erhält man selbst *l.* 3 schon durch den ersten kleinen Quotienten $\frac{m}{322}$ auf 7, und *l.* 7 durch den ersten Quotienten schon auf 12 Decimalziffern richtig. Ohne aber einen einzigen Quotienten zu gebrauchen, erhält man durch die bloſse Addition und Subtraction die Logarithmen für 11, 19, 251 schon auf 4, für 13, 23, 29, 37, 41 auf 5, für 43 bis 107 auf 6 bis 7, für 109 bis 179 auf 8, von 189 bis 283 auf 9, von 293 bis 521 auf 10 bis 11, von 523 bis 859 auf 11 bis 12, von 863 bis 1009 auf 12 bis 13 Decimalziffern richtig. Hätte man also dergleichen Formeln für die Primzahlen bis 10000; so würde man die Logarithmen derselben durch die bloſse Addition weniger bereits bekannter Logarithmen, und eine einzige Subtraction schon bis 15, 20 und mehrere Decimalziffern erhalten, und die Anfertigung logarithmischer Tafeln auf 15 und mehrere Decimalziffern würde ein bloſses Spielwerk seyn. Nun ist zwar diese Unternehmung heut zu Tage überflüssig. Allein desto vortheilhafter sind dergleichen Formeln, wenn man die Richtigkeit der bereits vorhandenen logarithmischen Tafeln, oder auch einzelner in wichtigen Rechnungen gebrauchten Logarithmen prüfen will. Denn da diese nach ganz andern Formeln berechnet worden; so kann man sich von ihrer Richtigkeit oder Unrichtigkeit aufs bequemste und schnellste überzeugen, und findet man sie in der That richtig; so ist dieses zugleich ein Beweis, daſs auch alle in ihrer Berechnung gebrauchten Logarithmen gleichfalls richtig sind, mithin wird selbst hiedurch die vollständige Revision vorhandener logarithmischer Tafeln auſserordentlich abgekürzt.

3. Will man aber die Quotienten der Reihe mit in die Berechnung bringen; so giebt schon der erste und um so mehr der zweyte Quotient den gesuchten Logarithmum auf eine sehr groſse Menge von Decimalziffern. So erhält man *l.* 263 durch den bloſsen Gebrauch des ersten Quotienten schon auf 29 oder 30, und wenn man den zweyten zu Hülfe nimmt, schon auf 49 oder 50 Decimalziffern. Wollte man *l.* 1009; so würde diesen Logarithmum der erste Quotient schon auf 36, und der zweyte auf 61 oder 62 Decimalziffern geben, und man dürfte bey jeder dieser beiden Divisionen nur 25 Ziffern des Quotienten nehmen. Hätte man also dergleichen Formeln für die Primzah-

len bis 10000; so würde schon der erste Quotient die Logarithmen der Primzahlen bis einige 40 und vielleicht 50 Decimalziffern geben. Hier ist also die Bequemlichkeit dieser Formeln auffallend. Wolframm hat eine Tafel der *natürlichen* Logarithmen bis auf 48 Decimalziffern geliefert. Schwerlich werden auch geübte Rechner sich dem mühsamen Geschäfte unterziehen, nach den bisher bekannten Methoden die Richtigkeit dieser Tafeln zu prüfen. Gleichwohl ist, wofern diese Tafeln brauchbar seyn sollen, dieses Geschäfte durchaus nothwendig. Durch die obigen Formeln aber würde diese Prüfung bis zur Primzahl 1009 nunmehr eben nicht ein sehr beschwerliches Geschäfte seyn, und wenn man dergleichen Formeln für die Primzahlen bis 10000 hätte, so würde die Prüfung der folgenden Logarithmen noch leichter werden. Eben so würde es keine zu grosse Mühe kosten, aus diesen Formeln die Briggischen Logarithmen eben so, wie die natürlichen, auf 48 Decimalziffern zu berechnen.

4. Hieraus ist also zugleich klar, daſs diese Formeln die gewöhnliche Verwandlung der natürlichen Logarithmen in Briggische, und dieser in jene mittelst der höchst lästigen Multiplication oder Division derselben durch den *Modul* des Briggischen Systems ganz entbehrlich machen, indem es offenbar weit leichter ist, jeden verlangten Logarithmen aus diesen Formeln unmittelbar zu berechnen, als erst den einen durch den Briggischen Modul zu multipliciren, oder zu dividiren, um so mehr, da es bey dieser widrigen Operation schwer zu untersuchen ist, ob sich nicht vielleicht ein Rechnungsfehler eingeschlichen habe.

5. Uebrigens zeigt der Anblick der gegebenen Formeln unmittelbar, daſs der gesuchte Multiplicator x nur sehr selten beträchtlich kleiner ist, als die gegebene Primzahl r. Dieses ist der Fall bey den Primzahlen 17, 31, 53, 79, 107, 157, 163, 173, 179, 199, 241, 251, 379, 653, 733, 739, 751, 797, 809, 811, 829, 859, 883, 907, 929, 971, 977, 1009, also unter 167 Primzahlen nur bey 28. Ueberdem aber kann ich nicht einmal Bürge seyn, ob es nicht für mehrere dieser Zahlen wirklich Multiplicatoren geben könne, die weit gröſser sind, als die von mir gefundenen. Denn bey der Eilfertigkeit, mit welcher ich diese Multiplicatoren aufsuchte, kann ich

leicht durch Rechnungsfehler die gröſsern übersehen haben, *) und bey den unlängst von Hrn. Vega vermehrt herausgegebenen Tafeln der Primzahlen würde es nicht schwer seyn, diese Sache auszumitteln. Hiezu kommt noch der Umstand, daſs, wenn es auch unter den Primzahlen keinen gröſsern Multiplicator gäbe, ein solcher vielleicht unter den *zusammengesezten* Zahlen befindlich seyn kann, indem bey der Zahl 11 und 13 diese Multiplicatoren wirklich die zusammengesezten Zahlen 9 und 27 sind. Denn wenn ich §. 8. Zus. 4. die Regel gebe, beym Aufsuchen des verlangten Multiplicators den Versuch mit den kleinern *Primzahlen* zu machen; so will ich hiedurch gar nicht sagen, daſs der Multiplicator durchaus eine Primzahl seyn müſse, und daher den Versuch mit den zusammengesezten Zahlen gänzlich ausschlieſsen, sondern ich erwähnte hier bloſs der Primzahlen, um bey den Versuchen einen regelmässigen Gang beyzubehalten. Hiebey bleibt es aber unbenommen, in solchen Fällen, wo sich unter den nächsten Primzahlen der Multiplicator nicht vorfindet, auch den Versuch mit zusammengesezten Zahlen zu machen. Statt jener 28 Primzahlen aber, wo nur die Aufsuchung des Multiplicators etwas mühsam wurde, sind 38 Primzahlen, wo sogleich der erste Versuch den Multiplicator gab, indem dieser hier die gegebene Zahl selbst ist. Indessen gestehe ich, daſs das Aufsuchen des verlangten Multiplicators immer mühsamer wird, je gröſser die Primzahl r wird, für welche man ihn sucht, weil hier die Factorentafeln von 1 bis 100000 nicht mehr hinreichen. Es ist daher nicht wenig zu bedauern, daſs das Manuscript einer von Hrn. *Anton Felkel* angefertigten völlig correcten Tafel der einfachen Factoren für die Zahlen von 1 bis auf *zwey Millionen*, welches **) im Archiv des K. K. Hofkriegsraths zu Wien aufbewahrt worden, dem Gerüchte nach, zu Patronen verbraucht, und also auf eine elende Art verlohren gegangen ist.

*) Dieses war mir bey l. 89 wirklich begegnet, wo ich zuerst auf den Multiplicator 71 kam, nachher aber fand, daſs schon 73 ein solcher ist.

**) Vega's Vorlesungen über die Mathematik, erster Band, zweyte Auflage, S. 505.

Hätte man eine solche Tafel; so würde das Aufsuchen des Multiplicators für die Primzahlen über 1009 ausserordentlich erleichtert werden. Von gedachtem Manuscripte, ist nach Herrn Vega's Bericht, die Tafel für die Zahlen von 1 bis 408000 in Wien bey Ghelen 1776 in Folio wirklich abgedruckt worden, allein ich habe sie, ungeachtet aller angewandten Mühe bis jetzt noch nicht erhalten können. Auch diese würde schon nützliche Dienste leisten. Indessen läſst sich auch in dem Falle, wo die Tafel der Factoren nicht mehr hinreicht, das Aufsuchen derselben merklich erleichtern. Denn man darf hier das Dividiren nicht durch alle Primzahlen bis zur Quadratwurzel versuchen, sondern mit den ersten Primzahlen nur bis zu derjenigen fortgehen, die zunächst kleiner, als die *Cubikwurzel* der Zahl ist, und dann erst wieder mit derjenigen Primzahl anfangen, die zunächst gröſser ist, als der Quotient, den man bekommt, wenn man die zu prüfende Zahl durch die Primzahl *r*, für welche der Multiplicator gesucht wird, dividirt, z. B. wenn man für die Primzahl 673 die Zahl 653 als Multiplicator annimmt; so kommt man auf die Zahl 109867, die schon die Lambertschen und Vegaschen Factorentafel übersteigt. Hier ist nun 47 die Primzahl, die zunächst kleiner ist, als ihre Cubikwurzel, und 167 die zunächst gröſser ist, als $163 = 109867 : 673$. Nun läſst sich 109867 durch die Primzahlen von 3 bis 47 nicht dividiren, also darf man nur versuchen, ob sie sich durch 167, oder eine der folgenden Primzahlen dividiren lasse. Denn gesetzt auch, sie lieſse sich wirklich durch eine von den Primzahlen zwischen 47 und 167 dividiren; so wäre der Quotient als der zweyte Theiler gröſser als 673, und zugleich eine Primzahl, weil er sonst 2 Theiler haben müſste, von denen jeder gröſser als 47 wäre, welches aber unmöglich ist, weil das Product dieser *drey* Theiler schon gröſser als der Cubus von 47, also gröſser als 109867 wäre. Beym wirklichen Dividiren durch 167 und die folgenden Primzahlen findet sich im gegenwärtigen Fall, daſs die Primzahl 181 ein Theiler, und daher der andere 607 ist.

II.

Sehr leichte und kurze allgemeine analytische Auflösung des polynomischen Problems.

II.

Sehr leichte und kurze allgemeine analytische Auflösung des polynomischen Problems.

A u f g a b e.

Von der vieltheiligen Zahl $p = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \ldots$ die n^{te} Potenz $p^n = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots$ zu finden.

Auflösung 1) Um unmittelbar zu erkennen, der wievielste Coefficient ein jeder sey, drücke man jeden gegebenen durch c, und jeden gesuchten durch x aus, und setze über diesen Buchstaben seine Ordnungszahl, so daſs $a = \overset{1}{c}$, $b = \overset{2}{c}$, $c = \overset{3}{c}$, $d = \overset{4}{c}$ u. s. w. imgleichen $A = \overset{1}{x}$, $B = \overset{2}{x}$, $C = \overset{3}{x}$ u. s. w.. und überhaupt der r^{te} gegebene Coefficient $= \overset{r}{c}$, und der r^{te} gesuchte $= \overset{r}{x}$ ist.

2) Man multiplicire

$$p^n = 1 + \overset{1}{x}z + \overset{2}{x}z^2 + \overset{3}{x}z^3 + \overset{4}{x}z^4 + \overset{5}{x}z^5 + \overset{6}{x}z^6 + \ldots$$

$$\text{durch } p = 1 + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \overset{5}{c}z^5 + \overset{6}{c}z^6 + \ldots;$$

$$\text{so ist } p^{n+1} = 1 + \left[\begin{array}{r} \overset{1}{x} \\ +\overset{1}{c} \end{array}\right] z + \left[\begin{array}{r} \overset{2}{x} \\ +\overset{1}{c}\overset{1}{x} \\ +\overset{2}{c} \end{array}\right] z^2 + \left[\begin{array}{r} \overset{3}{x} \\ +\overset{1}{c}\overset{2}{x} \\ +\overset{2}{c}\overset{1}{x} \\ +\overset{3}{c} \end{array}\right] z^3 + \left[\begin{array}{r} \overset{4}{x} \\ +\overset{1}{c}\overset{3}{x} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{x} \\ +\overset{3}{c}\overset{1}{x} \\ +\overset{4}{c} \end{array}\right] z^4 + \left[\begin{array}{r} \overset{5}{x} \\ +\overset{1}{c}\overset{4}{x} \\ +\overset{2}{c}\overset{3}{x} \\ +\overset{3}{c}\overset{2}{x} \\ +\overset{4}{c}\overset{1}{x} \\ +\overset{5}{c} \end{array}\right] z^5 + \left[\begin{array}{r} \overset{6}{x} \\ +\overset{1}{c}\overset{5}{x} \\ +\overset{2}{c}\overset{4}{x} \\ +\overset{3}{c}\overset{3}{x} \\ +\overset{4}{c}\overset{2}{x} \\ +\overset{5}{c}\overset{1}{x} \\ +\overset{6}{c} \end{array}\right] z^6 + \ldots$$

3) Man setze für p^n

$$\overset{1}{x} = n\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{x} = n\overset{2}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X}$$

$$\overset{3}{x} = n\overset{3}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X}$$

$$\overset{4}{x} = n\overset{4}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{3}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{1}{X}$$

$$\overset{5}{x} = n\overset{5}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{4}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{3}{X} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{2}{X}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,{}_5\overset{1}{X}$$

$$\overset{5}{x} = n\overset{6}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{3}{X}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,{}_5\overset{2}{X} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}\,{}_6\overset{1}{X}$$

u. s. w.

wo die Zahlen, 2, 3, 4 u. s. w. zur Linken von X anzeigen, zum wie vielsten Binomialcoefficienten die unbekannte Zahl X gehört, und die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. über X, die wievielste sie von jeder Art ist, z. B. ${}_3\overset{2}{X}$ zeigt an, daſs diese X die 2te von denjenigen Zahlen ist, die zum dritten Binomialcoefficienten gehören.

4) Hieraus bestimme man die Werthe der No. 2 für p^{n+1} gefundenen Coefficienten $\overset{1}{x} + \overset{1}{c}$, $\overset{2}{x} + \overset{1}{c}\,\overset{1}{x} + \overset{2}{c}$ u. s. w. nämlich:

$$\overset{1}{x} + \overset{1}{c} = (n+1)\,\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{x} + \overset{2}{c} = (n+1)\,\overset{2}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X}$$
$$+\overset{1}{c}\,\overset{1}{x} \quad . \quad +n.\overset{1}{c}\,\overset{1}{c}$$

$$\overset{3}{x}+\overset{3}{c} = (n+1)\overset{3}{c}+\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X}$$

$$\begin{matrix}+\overset{1}{c}\overset{2}{x}\\+\overset{2}{c}\overset{1}{x}\end{matrix}\qquad +n.\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\+\overset{2}{c}\overset{1}{c}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1}{1.2}\,\overset{1}{c}\,{}_2\overset{1}{X}$$

$$\overset{4}{x}+\overset{4}{c} = (n+1)\overset{4}{c}+\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{3}{X}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{1}{X}$$

$$\begin{matrix}+\overset{1}{c}\overset{3}{x}\\+\overset{2}{c}\overset{2}{x}\\+\overset{3}{c}\overset{1}{x}\end{matrix}\qquad +n.\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\+\overset{2}{c}\overset{2}{c}\\+\overset{3}{c}\overset{1}{c}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1}{1.2}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,\overset{1}{c}\,{}_3X$$

$$\overset{5}{x}+\overset{5}{c} = (n+1)\overset{5}{c}+\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{4}{X}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{3}{X}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{2}{X}+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,{}_5\overset{1}{X}$$

$$\begin{matrix}+\overset{1}{c}\overset{4}{x}\\+\overset{2}{c}\overset{3}{x}\\+\overset{3}{c}\overset{2}{x}\\+\overset{4}{c}\overset{1}{x}\end{matrix}\qquad +n\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\overset{4}{c}\\+\overset{2}{c}\overset{3}{c}\\+\overset{3}{c}\overset{2}{c}\\+\overset{4}{c}\overset{1}{c}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1}{1.2}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{3}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\+\overset{3}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_3\overset{2}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_3\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,\overset{1}{c}\,{}_4\overset{1}{X}$$

$$\overset{6}{x}+\overset{6}{c} = (n+1)\overset{6}{c}+\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{5}{X}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{4}{X}+\frac{n\ldots n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{3}{X}+\frac{n\ldots\ldots n-4}{1.2.3.4.5}\,{}_5\overset{2}{X}+\frac{n\ldots\ldots n-5}{1.2.3.4.5.6}\,{}_6\overset{1}{X}$$

$$\begin{matrix}+\overset{1}{c}\overset{5}{x}\\+\overset{2}{c}\overset{4}{x}\\+\overset{3}{c}\overset{3}{x}\\+\overset{4}{c}\overset{2}{x}\\+\overset{5}{c}\overset{1}{x}\end{matrix}\qquad +n\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\overset{5}{c}\\+\overset{2}{c}\overset{4}{c}\\+\overset{3}{c}\overset{3}{c}\\+\overset{4}{c}\overset{2}{c}\\+\overset{5}{c}\overset{1}{c}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1}{1.2}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{4}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_2\overset{3}{X}\\+\overset{3}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\+\overset{4}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_3\overset{3}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_3\overset{2}{X}\\+\overset{3}{c}\,{}_3\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n\ldots n-3}{1.2.3.4}\left\{\begin{matrix}\overset{1}{c}\,{}_4\overset{2}{X}\\+\overset{2}{c}\,{}_4\overset{1}{X}\end{matrix}\right\}+\frac{n\ldots\ldots n-4}{1.2.3.4.5}\,\overset{1}{c}\,{}_5\overset{1}{X}$$

u. s. w.

so sind die Zahlen ${}^{2}\overset{1}{X}$, ${}^{2}\overset{2}{X}$, ${}^{2}\overset{3}{X}$, u. s. w., welche $\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}$ zum Coefficienten haben, der Summe der Producte gleich, deren Coefficient n ist, eben so sind die Zahlen ${}^{3}\overset{1}{X}$, ${}^{3}\overset{2}{X}$, ${}^{3}\overset{3}{X}$ u. s. w., welche $\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}$ zum Coefficienten haben, der Summe der Producte gleich, deren Coefficient $\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}$ ist, und eben so verhält es sich mit allen folgenden, nämlich:

$${}^{2}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\overset{1}{c} \qquad {}^{3}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \qquad {}^{4}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X} \qquad {}^{5}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{4}\overset{1}{X} \qquad {}^{6}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{5}\overset{1}{X}$$

$${}^{2}\overset{2}{X} = \overset{1}{c}\overset{2}{c} + \overset{2}{c}\overset{1}{c} \qquad {}^{3}\overset{2}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \qquad {}^{4}\overset{2}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X} \qquad {}^{5}\overset{2}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{4}\overset{2}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{4}\overset{1}{X}$$

u. s. w.

$${}^{2}\overset{3}{X} = \overset{1}{c}\overset{3}{c} + \overset{2}{c}\overset{2}{c} + \overset{3}{c}\overset{1}{c} \qquad {}^{3}\overset{3}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{3}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \qquad {}^{4}\overset{3}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{3}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X}$$

u. s. w.

$${}^{2}\overset{4}{X} = \overset{1}{c}\overset{4}{c} + \overset{2}{c}\overset{3}{c} + \overset{3}{c}\overset{2}{c} + \overset{4}{c}\overset{1}{c} \qquad {}^{3}\overset{4}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{4}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{3}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{4}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}$$

u. s. w.

$${}^{2}\overset{5}{X} = \overset{1}{c}\overset{5}{c} + \overset{2}{c}\overset{4}{c} + \overset{3}{c}\overset{3}{c} + \overset{4}{c}\overset{2}{c} + \overset{5}{c}\overset{1}{c}$$

u. s. w.

u. s. w.

5) Man substituire also diese Werthe in No. 3; so bekommt man die gesuchten Coefficienten $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$ u. s. w. nach der Reihe durch die gegebenen $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$, $\overset{3}{c}$ u. s. w. und durch die Binomialcoefficienten n, $\frac{n.n-1}{1.2}$ u. s. w. ausgedrückt, nämlich:

$$\overset{1}{x} = n\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{x} = n\overset{2}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{3}{x} = n\overset{3}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{4}{x} = n\overset{4}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{5}{x} = n\overset{5}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{4}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{3}{c}\\ +\overset{3}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{4}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{1}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right].$$

$$+\frac{n\ldots n-4}{1.2.3.4.5}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{6}{x} = n\overset{6}{c} + \frac{n.n-1}{1.2}\left[\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{5}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\ +\overset{3}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{4}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{5}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left[\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{4}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{3}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{3}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{4}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] + \frac{n..n-3}{1.2.3.4}\left[\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right]$$

$$+ \frac{n...n-4}{1.2.3.4.5}\left[\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

mithin ist, wenn man die Binomialcoefficienten n, $\frac{n.n-1}{1.2}$, $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. s. w. nach der Reihe durch $^{1}\mathfrak{B}$, $^{2}\mathfrak{B}$, $^{3}\mathfrak{B}$ u. s. w. ausdrückt,

$$\overset{1}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{2}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{3}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{3}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\,2\overset{1}{c}\overset{2}{c} + {}^{3}\mathfrak{B}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{4}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{4}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{r} 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right] + {}^{3}\mathfrak{B}.3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} + {}^{4}\mathfrak{B}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{5}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{5}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{r} 2\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ +2\overset{2}{c}\overset{3}{c} \end{array}\right] + {}^{3}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{r} 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +3\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right] + {}^{4}\mathfrak{B}.4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} + {}^{5}\mathfrak{B}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$$

$$\overset{6}{x} = {}^1\mathfrak{B}\overset{6}{c} + {}^2\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \;\;2\overset{1}{c}\overset{5}{c} \\ +2\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\ +\;\;\overset{3}{c}\overset{3}{c}\end{array}\right] + {}^3\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \;\;3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ +6\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} \\ +\;\;\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\end{array}\right] + {}^4\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \;\;4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +6\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\end{array}\right] + {}^5\mathfrak{B}.5\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}$$

$$+{}^6\mathfrak{B}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Es ist nichts weiter zu beweisen, als daſs die No. 4 angegebene Werthe von ${}^2\overset{1}{X}$, ${}^2\overset{2}{X}$, ${}^2\overset{3}{X}$ u. s. w. imgleichen von ${}^3\overset{1}{X}$, ${}^3\overset{2}{X}$, ${}^3\overset{3}{X}$ u. s. w., und so von allen folgenden ${}^4\overset{1}{X}$, ${}^4\overset{2}{X}$ u. s. w. richtig sind, und dieses läſst sich auf folgende Art strenge darthun. Denn da nach No. 2 p^{n+1} aus p^n bloſs dadurch entsteht, daſs man, statt der Coefficienten $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$ u. s. w. der n^{ten} Potenz, die Coefficienten $\overset{1}{x}+\overset{1}{c}$, $\overset{1}{x}+\overset{1}{c}\;\overset{2}{x}+\overset{2}{c}$ u. s. w. setzt; so erhält man aus der Annahme No. 3. die Coefficienten für p^{n+1} aus den Coefficienten für p^n auf eine zwiefache Art, nämlich *einmal*, indem man (No. 2.) $\overset{1}{x}+\overset{1}{c}$ statt $\overset{1}{x}$, $\overset{1}{x}+\overset{1}{c}\;\overset{2}{x}+\overset{2}{c}$ statt $\overset{2}{x}$ u. s. w. setzt, wie No. 4 geschehen ist, und das *anderemal*, indem man bloſs $n+1$ statt n setzt. Da nun im letztern Fall

$$\overset{1}{x} = (n+1)\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{x} = (n+1)\overset{2}{c} + \frac{n+1.n}{1.2}\,{}^2\overset{1}{X}$$

$$\overset{3}{x} = (n+1)\overset{3}{c} + \frac{n+1.n}{1.2}\,{}^2\overset{2}{X} + \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}^3\overset{1}{X}$$

$$\overset{4}{x} = (n+1)\overset{4}{c} + \frac{n+1.n}{1.2}\,{}^2\overset{3}{X} + \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}^3\overset{2}{X} + \frac{n+1.n.n-1\,n-2}{1.2.3.4}\,{}^4\overset{1}{X}$$

$$\overset{5}{x} = (n+1)\overset{5}{c} + \frac{n+1.n}{1.2}\,{}^2\overset{4}{X} + \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}^3\overset{3}{X} + \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}\,{}^4\overset{2}{X}$$

$$+\frac{n+1.n\ldots n-3}{1.2.3.4.5}\,{}^5\overset{1}{X}$$

$$\overset{6}{x} = (n+1)\overset{6}{c} + \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{5}{X} + \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}_3\overset{4}{X} + \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{3}{X}$$
$$+ \frac{n+1.n\ldots.n-3}{1.2.3.4.5}\,{}_5\overset{2}{X} + \frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.6}\,{}_6\overset{1}{X}$$

u. s. w.;

so ist (No. 4.)

$$\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X} + n.\,\overset{1}{c}\overset{1}{c} = \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X}$$
$$\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X} + n\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] = \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X}$$
$$\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{3}{X} + n\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right] = \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{3}{X}$$

u. s. w.

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X} + \frac{n.n-1}{1.2}\,\overset{1}{c}\,{}_2\overset{1}{X} = \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X}$$
$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X} + \frac{n.n-1}{1.2}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\ +\overset{2}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{array}\right] = \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X}$$

u. s. w.

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{1}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\,\overset{1}{c}\,{}_3\overset{1}{X} = \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{1}{X}$$
$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{2}{X} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\,{}_3\overset{2}{X}\\ +\overset{2}{c}\,{}_3\overset{1}{X}\end{array}\right] = \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}\,{}_4\overset{2}{X}$$

u. s. w.

Nun ist $\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X} + n.\,{}_2\overset{1}{X} = \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{1}{X}$

$$\frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X} + n.\,{}_2\overset{2}{X} = \frac{n+1.n}{1.2}\,{}_2\overset{2}{X}$$

u. s. w.

Also ist ${}_2\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\overset{1}{c}$, ${}_2\overset{2}{X} = \left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right]$, ${}_2\overset{3}{X} = \left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c}\\ +\overset{3}{c}\overset{1}{c}\end{array}\right]$ u. s. w.

Eben so ist $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_3\overset{1}{X} = \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}_3\overset{1}{X}$

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X} + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_3\overset{2}{X} = \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\,{}_3\overset{2}{X}$$

u. s. w.

Also ist ${}_3\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}_2\overset{1}{X}$, ${}_3\overset{2}{X} = \left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\ +\overset{2}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{array}\right]$ ${}_3\overset{3}{X} = \left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\,{}_2\overset{3}{X}\\ +\overset{2}{c}\,{}_2\overset{2}{X}\\ +\overset{3}{c}\,{}_2\overset{1}{X}\end{array}\right]$ u. s. w.

Auf gleiche Art erhellt, daſs auch ${}_4\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}_3\overset{1}{X}$, ${}_4\overset{2}{X} = \left[\begin{array}{l}\overset{1}{c}\,{}_3\overset{2}{X}\\ +\overset{2}{c}\,{}_3\overset{1}{X}\end{array}\right]$ u. s. w. ist.

Also ist die Richtigkeit der Auflösung streng erwiesen.

Zusatz 1. Bey dieser Auflösung ist zuerst nicht nöthig, daſs man, um No. 2. für p^{n+1} alle Coefficienten nach einander zu finden, erst p^n durch p wirklich multiplicire, sondern der allgemeine r^{te} Coefficient für p^{n+1} ist $= \overset{r}{x} + \overset{1}{c}\,\overset{r-1}{x} + \overset{2}{c}\,\overset{r-2}{x} + \overset{3}{c}\,\overset{r-3}{x} + \ldots. + \overset{r-1}{c}\,\overset{1}{x} + \overset{r}{c}$. Denn es ist von selbst klar, daſs um den Coefficienten von z^r zu erhalten, No. 2. bloſs die untern Glieder 1, $\overset{1}{c}\,z$, $\overset{2}{c}\,z^2 \ldots$ bis $\overset{r}{c}\,z^r$ durch die correspondirenden obern $\overset{r}{x}\,z^r$, $\overset{r-1}{x}\,z^{r-1}$, $\overset{r-2}{x}\,z^{r-2} \ldots$ bis 1 zu multipliciren sind, mithin die gegebenen Coefficienten von $\overset{1}{c}$ bis $\overset{r}{c}$ wachsen, und die gesuchten von $\overset{r}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ abnehmen müssen.

Zusatz 2. Eben so wenig ist es nöthig, No. 4. die Werthe für ${}_2\overset{1}{X}$, ${}_2\overset{2}{X}$ etc., ${}_3\overset{1}{X}$, ${}_3\overset{2}{X}$ etc., ${}_4\overset{1}{X}$, ${}_4\overset{2}{X}$ etc. u. s. w. erst aus No. 3. nach der Reihe mühsam zu entwickeln, sondern für das zweyte Glied des r^{ten} Coefficienten für p^n ist allgemein

$${}_2\overset{r-1}{X} = \overset{1}{c}\,\overset{r-1}{c} + \overset{2}{c}\,\overset{r-2}{c} + \overset{3}{c}\,\overset{r-3}{c} + \ldots\ldots + \overset{r-1}{c}\,\overset{1}{c}$$

und für jedes m^{te} Glied, wo $m > 2$, ist

$$ {}_{m}\overset{r-(m-1)}{X} = \overset{1}{c}\,{}_{m-1}\overset{r-(m-1)}{X} + \overset{2}{c}\,{}_{m-1}\overset{r-m}{X} + \overset{3}{c}\,{}_{m-1}\overset{r-(m+1)}{X} + \ldots + \overset{r-(m-1)}{c}\,{}_{m-1}\overset{1}{X} $$

Denn nach der Annahme für p^{n} (No. 3.) ist

$$ \overset{r}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\,{}_{2}\overset{r-1}{X} + {}^{3}\mathfrak{B}\,{}_{3}\overset{r-2}{X} + {}^{4}\mathfrak{B}\,{}_{4}\overset{r-3}{X} + \ldots + {}^{r}\mathfrak{B}\,{}_{r}\overset{1}{X} $$

$$ \overset{r-1}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r-1}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\,{}_{2}\overset{r-2}{X} + {}^{3}\mathfrak{B}\,{}_{3}\overset{r-3}{X} + {}^{4}\mathfrak{B}\,{}_{4}\overset{r-4}{X} + \ldots + {}^{r-1}\mathfrak{B}\,{}_{r-1}\overset{1}{X} $$

$$ \overset{r-2}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r-2}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\,{}_{2}\overset{r-3}{X} + {}^{3}\mathfrak{B}\,{}_{3}\overset{r-4}{X} + {}^{4}\mathfrak{B}\,{}_{4}\overset{r-5}{X} + \ldots + {}^{r-2}\mathfrak{B}\,{}_{r-2}\overset{1}{X} $$

u. s. w. folglich

$$ \overset{r}{x} + \overset{r}{c} = ({}^{1}\mathfrak{B}+1)\,\overset{r}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\,{}_{2}\overset{r-1}{X} + {}^{3}\mathfrak{B}\,{}_{3}\overset{r-2}{X} + {}^{4}\mathfrak{B}\,{}_{4}\overset{r-3}{X} + \ldots + {}^{r}\mathfrak{B}\,{}_{r}\overset{1}{X} $$

$$ \begin{array}{l} +\overset{1}{c}\,\overset{r-1}{x} \\ +\overset{2}{c}\,\overset{r-2}{x} \\ +\overset{3}{c}\,\overset{r-3}{x} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,\overset{3}{x} \\ +\overset{r-2}{c}\,\overset{2}{x} \\ +\overset{r-1}{c}\,\overset{1}{x} \end{array} + {}^{1}\mathfrak{B} \left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,\overset{r-1}{c} \\ +\overset{2}{c}\,\overset{r-2}{c} \\ +\overset{3}{c}\,\overset{r-3}{c} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,\overset{3}{c} \\ +\overset{r-2}{c}\,\overset{2}{c} \\ +\overset{r-1}{c}\,\overset{1}{c} \end{array} \right] + {}^{2}\mathfrak{B} \left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{2}\overset{r-2}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{2}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{2}\overset{r-4}{X} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{2}\overset{2}{X} \\ +\overset{r-2}{c}\,{}_{2}\overset{1}{X} \end{array} \right] + {}^{3}\mathfrak{B} \left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{3}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{3}\overset{r-4}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{3}\overset{r-5}{X} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{3}\overset{1}{X} \end{array} \right] + \ldots + {}^{r-1}\mathfrak{B}\,\overset{1}{c}\,{}_{r-1}\overset{1}{X} $$

mithin ist, vermöge des obigen Beweises,

$$ {}_{2}\overset{r-1}{X} = \begin{array}{l} \overset{1}{c}\,\overset{r-1}{c} \\ +\overset{2}{c}\,\overset{r-2}{c} \\ +\overset{2}{c}\,\overset{r-3}{c} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,\overset{3}{c} \\ +\overset{r-2}{c}\,\overset{2}{c} \\ +\overset{r-1}{c}\,\overset{1}{c} \end{array}, \quad {}_{3}\overset{r-2}{X} = \begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{2}\overset{r-2}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{2}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{2}\overset{r-4}{X} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{2}\overset{2}{X} \\ +\overset{r-2}{c}\,{}_{2}\overset{1}{X} \end{array}, \quad {}_{4}\overset{r-3}{X} = \begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{3}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{3}\overset{r-4}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{3}\overset{r-5}{X} \\ + \\ \vdots \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{3}\overset{1}{X} \end{array} \ldots\ldots {}_{r}\overset{1}{X} = \overset{1}{c}\,{}_{r-1}\overset{1}{X} $$

Also ist allgemein

$${}_{m}\overset{r-(m-1)}{X} = \overset{1}{c}\,{}_{m-1}\overset{r-(m-1)}{X} + \overset{2}{c}\,{}_{m-1}\overset{r-m}{X} + \overset{3}{e}\,{}_{m-1}\overset{r-(m+1)}{X} + \ldots + \overset{r-(m-1)}{c}\,{}_{m-1}\overset{1}{X}$$

Zusatz 3. Also ist

$$\overset{r}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,\overset{r-1}{c} \\ +\overset{2}{c}\,\overset{r-2}{c} \\ +\overset{3}{c}\,\overset{r-3}{c} \\ + \\ : \\ +\overset{r-3}{c}\,\overset{3}{c} \\ +\overset{r-2}{c}\,\overset{2}{c} \\ +\overset{r-1}{c}\,\overset{1}{c} \end{array}\right] + {}^{3}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{2}\overset{r-2}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{2}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{2}\overset{r-4}{X} \\ + \\ : \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{2}\overset{2}{X} \\ +\overset{r-2}{c}\,{}_{2}\overset{1}{X} \end{array}\right] + {}^{4}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{l} \overset{1}{c}\,{}_{3}\overset{r-3}{X} \\ +\overset{2}{c}\,{}_{3}\overset{r-4}{X} \\ +\overset{3}{c}\,{}_{3}\overset{r-5}{X} \\ + \\ : \\ +\overset{r-3}{c}\,{}_{3}\overset{1}{X} \end{array}\right] + \ldots {}^{r}\mathfrak{B}\,\overset{1}{c}\,{}_{r-1}\overset{1}{X}$$

Da sich nun hier für $\overset{r}{x}$ aus dem 2ten Gliede das dritte, aus dem dritten das 4te u. s. w. nach Zus. 2. bequem finden läſst, so läſst sich durch diesen Satz jeder r^{te} Coefficient, unabhängig von den vorhergehenden, mithin auch *auſser der Reihe* finden.

Zusatz 4. Allein man kann für p^n nicht nur jeden r^{ten} Coefficienten $\overset{r}{x}$, sondern auch allgemein jedes m^{te} *Glied* desselben unabhängig von allen vorhergehenden, also *auſser der Reihe* finden, nämlich: auſser dem ersten Gliede ${}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r}{c}$ ist jedes andere m^{te} Glied ein Product, dessen erster Factor ${}^{m}\mathfrak{B}$, und der zweyte die Summe so vieler verschiedenen Producte von m gegebenen Coefficienten ist, als sich aus ihnen dergestalt zusammensetzen lassen, daſs die Summe ihrer Ordnungszahlen jedesmal $= r$ wird, und von denen jedes so viel mal genommen werden muſs, als seine Factoren sich verwechseln lassen. Von den (No. 5.) sechs ersten gefundenen Coefficienten lehrt dieses der Augenschein. Daſs dieser Satz aber allgemein von jedem gesuchten Coefficienten, und von jedem Gliede desselben gilt, läſst sich auf folgende Art beweisen. Vom zweyten Gliede ${}^{2}\mathfrak{B}\,{}^{2}\overset{r-1}{X}$ ist dieses be-

reits (Zus. 3.) allgemein dargethan worden, und eben so erhellt es auch vom dritten ³𝔅 ${}_3\overset{r-2}{X}$, indem (Zus. 2.)

$$
\begin{array}{llllllll}
{}_3\overset{r-2}{X} = \overset{1}{c}\,{}_2\overset{r-2}{X} & = \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{r-2}{c} & + \overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{r-3}{c} & + \overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{r-4}{c} & + \ldots & + \overset{1}{c}\overset{r-3}{c}\overset{2}{c} & + \overset{1}{c}\overset{r-2}{c}\overset{1}{c} \\
\quad + \overset{2}{c}\,{}_2\overset{r-3}{X} & = + \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{r-3}{c} & + \overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{r-4}{c} & + \overset{2}{c}\overset{3}{c}\overset{r-5}{c} & + \ldots & + \overset{2}{c}\overset{r-4}{c}\overset{2}{c} & + \overset{2}{c}\overset{r-3}{c}\overset{1}{c} \\
\quad + \overset{3}{c}\,{}_2\overset{r-4}{X} & = + \overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{r-4}{c} & + \overset{3}{c}\overset{2}{c}\overset{r-5}{c} & + \overset{3}{c}\overset{3}{c}\overset{r-6}{c} & + \ldots & + \overset{3}{c}\overset{r-5}{c}\overset{2}{c} & + \overset{3}{c}\overset{r-4}{c}\overset{1}{c} \\
\quad + & \quad + & + & + & + & + & + \\
\quad \vdots & \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\quad + \overset{r-3}{c}\,{}_2\overset{2}{X} & = + \overset{r-3}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} & + \overset{r-3}{c}\overset{2}{c}\overset{1}{c} & & & & \\
\quad + \overset{r-2}{c}\,{}_2\overset{1}{X} & = + \overset{r-2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} & & & & &
\end{array}
$$

Da nun das vierte Glied aus dem dritten, das fünfte aus dem vierten, und überhaupt das m^{te} aus dem $(m - 1^{ten})$ ganz auf dieselbe Art erzeugt wird, als das dritte aus dem zweyten (Z. 2. 3.); so ist von selbst klar, daſs der Satz für jedes Glied allgemein wahr seyn muſs. Will man also jedes m^{te} Glied des r^{ten} gesuchten Coefficienten $\overset{r}{x}$, unabhängig von allen vorhergehenden Gliedern, mithin auch auſser der Reihe, finden; so verfahre man also:

1) Man setze aus m gegebenen Coefficienten als Factoren so viele verschiedene Producte, als es angeht, dergestalt zusammen, daſs die Summe ihrer Ordnungszahlen beständig $= r$ bleibt, oder, welches einerley ist, man zerfälle die Zahl r so vielmal, als es angeht, in m Theile, so daſs keine Zerfällung mit den übrigen ganz einerley Theile hat, und setze die Zahlen einer jeden über c; so hat man alle verschiedene Producte.

2) Ein jedes dieser Producte multiplicire man durch die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal sich seine Factoren verwechseln lassen.

3) Die Summe aller dieser Producte multiplicire man durch den m^{ten} Binomialcoefficienten; so hat man das m^{te} Glied für $\overset{r}{x}$.

Hiebey ist zu merken, daſs man No. 1. jedes verschiedene einzelne Product wirklich darstellen muſs. Die No. 2. verlangte Permutationszahl seiner Factoren aber findet man aus dem bekannten Permutationssatze:

Bey u verschiedenen Dingen ist die Zahl aller möglichen Versetzungen $= 1.2.3.4.5\ldots\ldots u.$ kommt aber unter u Dingen eines t mal, ein anderes v mal, ein drittes w mal u. s. w. vor; so ist die Zahl aller möglichen Versetzungen $= \dfrac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots\ldots u}{1.2.3\ldots t \times 1.2.3\ldots v \times 1.2.3\ldots w}$,

z. B. Gesetzt, man verlangt das vierte Glied des zehnten Coefficienten, so ist $r = 10$, $m = 4$, folglich die verschiedenen Zerfällungen der Zahl 10 in 4 Theile folgende acht:

$1.1.1.7$, und in der ersten und 7^{ten} Zerfällung ist die
$1.1.2.6$
$1.1.3.5$ Zahl der Versetzungen $= \dfrac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$,
$1.1.4.4$ in der 2^{ten}, 3^{ten} und $5^{ten} = \dfrac{1.2.3.4}{1.2} = 12$,
$1.2.2.5$
$1.2.3.4$ in der 4^{ten} und $8^{ten} = \dfrac{1.2.3.4}{2.1.2} = 6$,
$2.2.2.4$
$2.2.3.3$ und in der $6^{ten} = 1.2.3.4 = 24$.

Also ist das 4^{te} Glied des 10^{ten} Coefficienten $=$

$$^{4}\mathfrak{B}\left(4\,\overset{1117}{cccc}+12\,\overset{11}{cc}\left(\overset{26}{cc}+\overset{35}{cc}\right)+6\,\overset{1144}{cccc}+12\,\overset{1225}{cccc}+24\,\overset{1234}{cccc}+4\,\overset{2224}{cccc}+6\,\overset{2233}{cccc}\right)$$

$$= \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\left[4a^3g+12a^2(bf+ce)+6a^2d^2+12ab^2e+24abcd+4b^3d+6b^2c^2\right].$$

Zusatz 5. Wenn $p = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots$; so ist

$$p = az\left(1 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}z^2 + \frac{d}{a}z^3 + \ldots\right), \text{ mithin}$$

$$p^n = a^n z^n\left(1 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}z^2 + \frac{d}{a}z^3 + \ldots\right)^n.$$ Also darf man hier nur

$$\overset{1}{c} = \frac{b}{a},\ \overset{2}{c} = \frac{c}{a},\ \overset{3}{c} = \frac{d}{a}$$ u. s. w. setzen.

Zusatz 6. Wenn daher $p = a + b + c + d + e + \ldots$; so wird $z = 1$, also $p^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{e}{a} + \ldots\right)^n$

Zusatz 7. Wenn ganz allgemein

$$p = au^e + bu^{(e+w)} + cu^{(e+2w)} + du^{(e+3w)} + \ldots;\text{ so ist}$$

$$p = au^e\left(1 + \frac{b}{a}u^w + \frac{c}{a}u^{2w} + \frac{d}{a}u^{3w} + \ldots\right),\text{ mithin}$$

$$p^n = a^n u^{ne}\left(1 + \frac{b}{a}u^w + \frac{c}{a}u^{2w} + \frac{d}{a}u^{3w} + \ldots\right)^n.$$

Also darf man nur $u^w = z$ setzen; so ist

$$p^n = a^n u^{ne}\left(1 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}z^2 + \frac{d}{a}z^3 + \ldots\right)^n.$$

Zusatz 8. Wenn $p = az + bz^2$ ist; so ist

$$p^n = a^n z^n\left(1 + \frac{b}{a}z\right)^n \text{ (Z. 5.), folglich ist hier}$$

$\overset{1}{c} = \frac{b}{a}$, $\overset{2}{c}$ [illegible] mithin ist

$\overset{1}{x} = {}^1\mathfrak{B}\overset{1}{c}$, $\overset{2}{x} = {}^2\mathfrak{B}\overset{11}{cc}$, $\overset{3}{x} = {}^3\mathfrak{B}\overset{111}{ccc}$, $\overset{4}{x} = {}^4\mathfrak{B}\overset{1111}{cccc}$ u. s. w. (Z. 3. 4.), folglich

$$\left(1 + \frac{b}{a}z\right)^n = 1 + n\frac{b}{a}z + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2}z^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}z^3 + \ldots,\text{ also}$$

$$(az + bz^2)^n = a^n z^n + na^{n-1}bz^{n+1} + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2z^{n+2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}b^3z^{n+3} + \ldots$$

Zusatz 9. Setzt man also $z = 1$; so ist

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots$$

Also läſst sich der binomische Lehrsatz aus der von ihm unabhängigen Auflösung der polynomischen Aufgabe unmittelbar als ein Corollarium herleiten.

Zusatz 10. Man setze die Zahl der Theile, aus welchen p besteht $= \pi$; so ist die Zahl der gegebenen Coefficienten, mithin auch die Ordnungszahl des letzten, als die gröſseste $= \pi - 1$. Nun ist von $\overset{r}{x}$ das erste Glied $= {}^{1}\mathfrak{B}\,\overset{r}{c}$, und in jedem andern u^{ten} Gliede hat jedes der Producte, deren Summe als Factor zu ${}^{u}\mathfrak{B}$ gehört, von den gegebenen Coefficienten u, solche Factoren, daſs die Summe ihrer Ordnungszahlen beständig $= r$ ist (Z. 4.). Also wird von $\overset{r}{x}$ das erste Glied $= 0$, sobald $r > \pi - 1$; das zweyte, sobald $r > 2\,(\pi - 1)$, das dritte, sobald $r > 3\,(\pi - 1)$ u. s. w., mithin überhaupt das u^{te}, sobald $r > u\,(\pi - 1)$ wird. Z. B. Gesetzt ich will für die n^{te} Potenz der 3theiligen Zahl $1 + az + bz^2$ den zehnten Coefficienten $\overset{10}{x}$; so ist hier $\pi = 3$, folglich $\pi - 1 = 2$, und $r = 10$. Da nun $10 > 4 \times 2$, aber nicht mehr $10 > 5 \times 2$; so werden nur die vier ersten Glieder von $\overset{10}{x} = 0$, und es ist daher

$$\overset{10}{x} = {}^{5}\mathfrak{B}\overset{22222}{ccccc} + {}^{6}\mathfrak{B}\,15\overset{112222}{cccccc} + {}^{7}\mathfrak{B}\,35\overset{1111222}{ccccccc} + {}^{8}\mathfrak{B}\,28\overset{11111122}{cccccccc} + {}^{9}\mathfrak{B}\,9\overset{111111112}{ccccccccc} + {}^{10}\mathfrak{B}\left(\overset{1}{c}\right)^{10}$$

$$= {}^{5}\mathfrak{B}\,b^5 + {}^{6}\mathfrak{B}\,15\,a^2 b^4 + {}^{7}\mathfrak{B}\,35\,a^4 b^3 + {}^{8}\mathfrak{B}\,28\,a^6 b^2 + {}^{9}\mathfrak{B}\,9\,a^8 b + {}^{10}\mathfrak{B}\,a^{10}$$

Zusatz 11. Da sowohl die Form der Auflösung, als ihres Beweises ganz dieselbe bleibt, was für eine Zahl man auch unter dem Exponenten n verstehen mag, eine ganze, oder gebrochene, eine positive, oder negative, eine rationale, oder irrationale, eine mögliche, oder imaginaire; so ist die Auflösung des polynomischen Problems allgemein richtig, was für eine Zahl auch der Exponent n seyn mag.

Zusatz 12. Also ist hiedurch zugleich erwiesen, daſs auch der *binomische* Lehrsatz allgemein richtig ist, was für eine Zahl auch der Exponent n seyn mag. (Z. 9.)

Anmerkung 1.

Bey dieser Auflösung des so schwierigen und verwickelten polynomischen Problems, welches Herr Prof. *Hindenburg* *) mit Recht

*) Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis etc. von Carl Friedrich Hindenburg. Leipzig bey Gerhard Fleischer dem jüngern, 1796. 304. S. in gr. 8.

für den wichtigsten Satz der ganzen Analysis, und Herr Prof. Klügel *) gleichsam für einen hohen Standort erklärt, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann, ist zuerst die *Leichtigkeit* und *Kürze*, mit welcher sie *gefunden* werden, auffallend. Die gewöhnlichen Auflösungen desselben von Moivre, Bernoulli, Colson, Euler, Kästner, erfordern bekanntlich selbst von Anfängern, die in der gemeinen und höhern Analysis schon ziemlich geübt sind, so grofse Anstrengung, dafs ihnen fast der Muth vergeht, sich durch alle die weitläuftigen und verwickelten Substitutionen hindurch zu arbeiten, um erst die Richtigkeit der Auflösung einzusehen. Dieses eben veranlafste mich, eine Auflösung zu suchen, die sich kürzer und fafslicher vortragen liefse, weil dieses in Rücksicht des *binomischen* Lehrsatzes nach seiner völligen Allgemeinheit schon vor mehrern Jahren mir wirklich gelungen war. Dafs ich aber meinen Zweck auf einem so aufserordentlich leichten Wege erreichen würde, konnte mir nie einfallen. Diese Leichtigkeit und Kürze entsprang indessen natürlich aus dem Geist der gewählten Methode, nämlich aus der glücklichen Idee, No. 3. die für p^n gesuchten Coefficienten $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$ etc. durch eine Summe von Producten aus andern unbekannten Zahlen ${}^2\overset{1}{X}$, ${}^2\overset{3}{X}$, ${}^3\overset{1}{X}$ etc. in die figurirten Zahlen, oder sogenannten Binomialcoefficienten $n, \frac{n.n-1}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ etc. auszudrücken, die man nach der Ordnung der letztern folgen läfst. Denn hiedurch entsteht für p^{n+1} eine doppelte Gleichung, die eine, indem man nach No. 4. diese für p^n willkührlich angenommenen Werthe in der No. 2. für p^{n+1} gefundenen Gleichung substituirt, die andere aber, indem man in eben diesen Werthen für p^n überall blofs $n+1$ statt n setzt, und durch diese doppelte Gleichung wird alles angenommene Unbekannte durch die für p gegebenen Coefficienten unmittelbar gegeben. So bald ich daher auf diese Idee kam, lag die ganze Auflösung vor meinem Gemüthe klar da.

*) Ebendaselbst S. 51.

Anmerkung 2.

Ein anderer wichtiger Vorzug dieser Auflösung ist der, dafs sie unmittelbar für *jede* Potenz allgemein gültig ist, der Exponent derselben sey eine ganze, oder gebrochene, eine positive, oder negative, eine rationale, oder irrationale, eine mögliche, oder blofs imaginäre Zahl (Z. 11.). Denn bey der Multiplication von p^n durch p No. 2. kommt die Qualität des Exponenten n so wenig in Betrachtung, dafs derselbe im Product p^{n+1} gar nicht einmal befindlich ist, und in den figurirten Zahlen No. 3. kann die Zahl n ebenfalls bedeuten, was man will, indem sie hier gar nicht als figurirte Zahlen oder Binomialcoefficienten betrachtet, sondern als willkührliche Factoren angenommen worden, wo die Form der Multiplication immer dieselbe bleibt, was auch n bedeuten mag, übrigens aber beruht gar nichts weiter auf Multiplication, sondern blofs auf Substitutionen, und die im *Beweise* gebrauchten Sätze sind gleichfalls allgemein gültig, was für eine Zahl auch n seyn mag.

Diesen Vorzug der *unmittelbaren* Allgemeinheit hat, meines Wissens, keine andere Auflösung des polynomischen Problems, als die *Kästnerische*, die aber auf Differentialrechnung beruht, und daher nicht für blofse Anfänger gehört. Alle übrigen Methoden, die n^{te} Potenz einer vieltheiligen Zahl p zu finden, welche aus wiederholter Multiplication von p durch sich selbst hergeleitet werden, sind unmittelbar blofs für die Fälle gültig, wo der Exponent n eine *positive ganze* Zahl ist, und setzen daher, wenn ihre Allgemeinheit für alle Exponenten einleuchtend seyn soll, entweder schon die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes, deren Beweis selbst nicht wenig schwierig ist, voraus, oder müssen erst hinterher durch andere Kunstgriffe allgemein gemacht werden. Dagegen hat unsere vom binomischen Lehrsatze ganz unabhängige Auflösung des polynomischen Problems zugleich den eigenthümlichen Vorzug, dafs sie selbst dem Anfänger, der vom binomischen Lehrsatze noch gar nichts weifs, fafslich ist, und ihm diesen in seiner gröfsesten Allgemeinheit als ein unmittelbares Corollarium zugleich mit darstellt (Z. 9. 12.).

Anmerkung 3.

So kurz unsere Auflösung des polynomischen Problems ist; so hat sie gleichwohl auch das besondere, dafs sie *vier* verschiedene Methoden, ein jedes Polynomium oder Infinitomium allgemein zu jeder beliebigen Potenz zu erheben, in sich enthält, und zwar zwey Substitutionsmethoden, und zwey combinatorische. Die erste von diesen 4 Methoden, welche die Auflösung unmittelbar angiebt, erfordert

a) Dafs man No. 2. die Multiplication von p^n durch p bis zu dem verlangten Coefficienten fortsetze.

b) Dafs dieses No. 3. mit dem für jeden gesuchten Coefficienten anzunehmenden Werthe ebenfalls geschehe.

c) Dafs No. 4. die Substitution dieser Werthe in den Coefficienten No. 2. gleichfalls bis zum verlangten Coefficienten fortgeführt werde, um hiedurch die Werthe der unbekannten Zahlen ${}^{2}\overset{1}{X}$, ${}^{3}\overset{1}{X}$ etc., so weit als nöthig ist, auszumitteln.

d) Dafs man No. 5. letztere in No. 3. substituire, um die gesuchten Coefficienten zu erhalten.

Nun machen die beyden ersten Forderungen *a*, *b* gar keine Mühe, indem hier die Folge so offenbar ist, dafs die verlangten Werthe sich für jeden Coefficienten auch aufser der Reihe unmittelbar hinschreiben lassen. Z. B.

in No. 2. ist der 10te Coefficient

$$=\overset{10}{x}+\overset{1\,9}{c\,x}+\overset{2\,8}{c\,x}+\overset{3\,7}{c\,x}+\overset{4\,6}{c\,x}+\overset{5\,5}{c\,x}+\overset{6\,4}{c\,x}+\overset{7\,3}{c\,x}+\overset{8\,2}{c\,x}+\overset{9\,1}{c\,x}+\overset{10}{c}$$

und in No. 3. ist der 10te Coefficient

$$\overset{10}{x}={}^{1}\mathfrak{B}\overset{10}{c}+{}^{2}\mathfrak{B}^{2}\overset{9}{X}+{}^{3}\mathfrak{B}^{3}\overset{8}{X}+{}^{4}\mathfrak{B}^{4}\overset{7}{X}+{}^{5}\mathfrak{B}^{5}\overset{6}{X}+{}^{6}\mathfrak{B}^{6}\overset{5}{X}+{}^{7}\mathfrak{B}^{7}\overset{4}{X}+{}^{8}\mathfrak{B}^{8}\overset{3}{X}+{}^{9}\mathfrak{B}^{9}\overset{2}{X}+{}^{10}\mathfrak{B}^{10}\overset{1}{X}$$

Also sind bey dieser ersten Methode blofs die in *c*, *d* geforderten Substitutionen nöthig, um die gesuchten Coefficienten nach der Reihe zu finden, und dafs diese Substitutionen nicht eben grofse Mühe machen, zeigt schon die leichte Berechnung der 6 ersten Coefficienten, die ich blofs der Kürze wegen nicht für mehrere fortgesetzt habe. Ich würde daher schon mit dieser auf einem so leichten und kurzen Wege gefundenen allgemeinen Methode schon völlig zufrieden gewe-

sen seyn, da mein eigentlicher Zweck eine solche Auflösung dieses verwickelten Problems zu finden, die auch dem Anfänger faſslich wäre, durch dieselbe schon erreicht war. Allein ich sahe bald mit Vergnügen, daſs diese unmittelbar zu einer zweyten noch vollkommenern Methode führte.

Diese *zweyte* Methode macht zuerst auch die Fortsetzung der No. 4. erforderlichen Substitutionen entbehrlich, indem sich nach Zus. 2. die Werthe der No. 3. angenommenen unbekannten Zahlen unmittelbar durch folgende allgemeine Formeln bestimmen lassen:

$${}_m\overset{1}{X} = (\overset{1}{c})^m = a^m$$

$${}_2\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,\overset{u}{c} + \overset{2}{c}\,\overset{u-1}{c} + \overset{3}{c}\,\overset{u-2}{c} + \overset{4}{c}\,\overset{u-3}{c} + \ldots + \overset{u}{c}\,\overset{1}{c}$$

$${}_3\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}_2\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}_2\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}_2\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}_2\overset{u-3}{X} + \ldots + \overset{u}{c}\,{}_2\overset{1}{X}$$

$${}_4\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}_3\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}_3\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}_3\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}_3\overset{u-3}{X} + \ldots + \overset{u}{c}\,{}_3\overset{1}{X}$$

$${}_5\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}_4\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}_4\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}_4\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}_4\overset{u-3}{X} + \ldots + \overset{u}{c}\,{}_4\overset{1}{X}$$

u. s. w., also überhaupt

$${}_m\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}_{m-1}\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}_{m-1}\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}_{m-1}\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}_{m-1}\overset{u-3}{X} + \ldots + \overset{u}{c}\,{}_{m-1}\overset{1}{X}.$$

Da sich also die unbekannten Zahlen ${}_3\overset{u}{X}$, ${}_4\overset{u}{X}$, ${}_5\overset{u}{X}$ etc. alle auf ${}_2\overset{u}{X}$ und ${}_m\overset{1}{X}$ reduciren, und hiedurch durch lauter gegebene Coefficienten bestimmen lassen; so ist, um die gesuchten Coefficienten $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$ etc. zu finden, bey dieser Methode nichts weiter nöthig, als daſs man ihre Werthe in den No. 3. für $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, $\overset{3}{x}$ etc. angenommenen Formeln substituirt. Auſserdem aber hat sie zugleich das Vortheilhafte, daſs man nach derselben die gesuchten Coefficienten nicht nur nach der Reihe, sondern jeden r^{ten} Coefficienten unabhängig von den vorhergehenden, ja selbst, welches oben Zus. 3. nicht einmal erwähnt worden, jedes Glied desselben unabhängig von den vorhergehenden, mithin auſser der Reihe nach Z. 3. finden kann; ein Vorzug, den, auſser der combinatorischen Methode, keine von allen bis dahin bekannten Auflösungen besitzt.

Um sowohl das Verfahren selbst, als auch die Leichtigkeit desselben durch ein Beyspiel anschaulich zu machen, setze man, es werde für die n^{te} Potenz des Polynomii p der 7^{te} Coefficient verlangt; so ist hier nach Zus. 3.

$$\overset{7}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{7}{c} + {}^{2}\mathfrak{B}\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\overset{6}{c}\\ \overset{2}{c}\overset{5}{c}\\ \overset{3}{c}\overset{4}{c}\\ \overset{4}{c}\overset{3}{c}\\ \overset{5}{c}\overset{2}{c}\\ \overset{6}{c}\overset{1}{c}\end{array} + {}^{3}\mathfrak{B}\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{5}{X}\\ \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{4}{X}\\ \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{3}{X}\\ \overset{4}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X}\\ \overset{5}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}\end{array} + {}^{4}\mathfrak{B}\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{4}{X}\\ \overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{3}{X}\\ \overset{3}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X}\\ \overset{4}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X}\end{array} + {}^{5}\mathfrak{B}\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\,{}^{4}\overset{3}{X}\\ \overset{2}{c}\,{}^{4}\overset{2}{X}\\ \overset{3}{c}\,{}^{4}\overset{1}{X}\end{array} + {}^{6}\mathfrak{B}\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\,{}^{5}\overset{2}{X}\\ \overset{2}{c}\,{}^{5}\overset{1}{X}\end{array} + {}^{7}\mathfrak{B}\overset{1}{c}\,{}^{6}\overset{1}{X}$$

wo überall vor den Producten, deren Summe durch den Binomialcoefficienten zu multipliciren ist, der Kürze wegen, sowohl das Zeichen + als die Parenthese weggelassen worden.

Hier sind nun die beyden ersten gesuchten Coefficienten schon durch lauter gegebene ausgedrückt. Setzt man also im dritten Gliede die Werthe der 5 unbekannten Zahlen aus der Formel für ${}^{2}\overset{n}{X}$ unmittelbar hin; so ist das *dritte* Glied

$$= {}^{3}\mathfrak{B}\left[\begin{array}[t]{l}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{5}{c}\\ \overset{2}{c}\overset{4}{c}\\ \overset{3}{c}\overset{3}{c}\\ \overset{4}{c}\overset{2}{c}\\ \overset{5}{c}\overset{1}{c}\end{array} + \begin{array}[t]{l}\overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c}\\ \overset{2}{c}\overset{3}{c}\\ \overset{3}{c}\overset{2}{c}\\ \overset{4}{c}\overset{1}{c}\end{array} + \begin{array}[t]{l}\overset{3}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\\ \overset{2}{c}\overset{2}{c}\\ \overset{3}{c}\overset{1}{c}\end{array} + \begin{array}[t]{l}\overset{4}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\end{array} + \overset{5}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\right]$$

Nun ist ferner das vierte Glied nach der Formel ${}^{3}\overset{n}{X}$

$$= {}^{4}\mathfrak{B}\left[\overset{1}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{4}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{3}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{4}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}\right) + \overset{2}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{3}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}\right) + \overset{3}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}\right) + \overset{4}{c}\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X}\right].$$

Also ist wieder nach ${}^{2}\overset{u}{X}$ das vierte Glied

$$=\,^{4}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{llll}
\overset{1114}{cccc} & +\overset{2113}{cccc} & +\overset{3112}{cccc} & +\overset{4111}{cccc} \\
\overset{23}{cc} & \overset{22}{cc} & \overset{21}{cc} & \\
\overset{32}{cc} & \overset{31}{cc} & \overset{211}{ccc} & \\
\overset{41}{cc} & \overset{212}{ccc} & & \\
\overset{213}{ccc} & \overset{21}{cc} & & \\
\overset{22}{cc} & \overset{311}{ccc} & & \\
\overset{31}{cc} & & & \\
\overset{312}{ccc} & & & \\
\overset{21}{cc} & & & \\
\overset{411}{ccc} & & &
\end{array}\right]$$

Ferner ist das fünfte Glied nach der Formel ${}^{4}\overset{u}{X}$

$$=\,^{5}\mathfrak{B}\left[\overset{1}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{3}{X}+\overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X}+\overset{3}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X}\right)+\overset{2}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X}+\overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X}\right)+\overset{31}{cc}\,{}^{3}\overset{1}{X}\right]$$

$$=\,^{5}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{llllll}
\overset{111}{ccc}\,{}^{2}\overset{3}{X} & +\overset{121}{ccc}\,{}^{2}\overset{2}{X} & +\overset{131}{ccc}\,{}^{2}\overset{1}{X} & +\overset{211}{ccc}\,{}^{2}\overset{2}{X} & +\overset{221}{ccc}\,{}^{2}\overset{1}{X} & +\overset{311}{ccc}\,{}^{2}\overset{1}{X} \\
\overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} & \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} & & \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} & & \\
\overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} & & & & &
\end{array}\right]$$

$$=\,^{5}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{lll}
\overset{11113}{ccccc} & +\overset{21112}{ccccc} & +\overset{31111}{ccccc} \\
\overset{22}{cc} & \overset{21}{cc} & \\
\overset{31}{cc} & \overset{211}{ccc} & \\
\overset{212}{ccc} & \overset{2111}{cccc} & \\
\overset{21}{cc} & & \\
\overset{311}{ccc} & & \\
\overset{2112}{cccc} & & \\
\overset{21}{cc} & & \\
\overset{211}{ccc} & & \\
\overset{3111}{cccc} & &
\end{array}\right]$$

Ferner ist das sechste Glied nach ${}^{5}\overset{u}{X}$

$$= {}^{6}\mathfrak{B}\left[\overset{1}{c}\left(\overset{1}{c}\,{}^{4}\overset{2}{X}+\overset{2}{c}\,{}^{4}\overset{1}{X}\right)+\overset{2}{c}\overset{1}{c}\,{}^{4}\overset{1}{X}\right]$$

$$= {}^{6}\mathfrak{B}\left[\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{2}{X} + \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X} \\ \overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X} \qquad\qquad \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{1}{X} \qquad\qquad \end{array}\right] = {}^{6}\mathfrak{B}\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{2}{X} \\ \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{1}{X} \end{array}$$

$$= {}^{6}\mathfrak{B}\begin{array}{r} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \\ \overset{2}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}$$

Endlich ist das siebente Glied $= \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}$

Bey dieser Berechnung des siebenten Coefficienten habe ich das Verfahren mit Fleiſs ganz umständlich ohne die geringste Abkürzung dargestellt, um es anschaulich zu zeigen, wie sehr diese Methode alle bekannte Substitutionsmethoden auch an Leichtigkeit und Simplicität der Rechnung übertrifft. Allein auch dieses Verfahren läſst sich noch auſserordentlich erleichtern, indem man ohne viele Mühe die unbekannten Zahlen ${}^{3}\overset{u}{X}$, ${}^{4}\overset{n}{X}$, ${}^{5}\overset{u}{X}$ etc. so weit man will, ein für allemal auf ${}^{2}\overset{u}{X}$, und zwar auf eine Menge Glieder reduciren kann, wo man nachher für jeden verlangten Coefficienten, ja für jedes Glied desselben auch auſser der Reihe zu den gefundenen Zahlen nur die Werthe von ${}^{2}\overset{u}{X}$, ${}^{2}\overset{u-1}{X}$ etc. unmittelbar hinzusetzen darf. Wie bequem sich diese Reductionen ein für allemal anstellen lassen, wird die Operation selbst am besten zeigen. Es ist nämlich:

$${}^{3}\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{2}\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{2}\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{2}\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}^{2}\overset{u-3}{X} + \overset{5}{c}\,{}^{2}\overset{u-4}{X} + \overset{6}{c}\,{}^{2}\overset{u-5}{X} + \overset{7}{c}\,{}^{2}\overset{u-6}{X} + \ldots$$

$${}^{4}\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}^{3}\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}^{3}\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}^{3}\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}^{3}\overset{u-3}{X} + \overset{5}{c}\,{}^{3}\overset{u-4}{X} + \overset{6}{c}\,{}^{3}\overset{u-5}{X} + \overset{7}{c}\,{}^{3}\overset{u-6}{X} + \ldots$$

also

$$
{}^4\overset{u}{X} = \overset{11}{cc}\,{}^2\overset{u}{X} + \begin{array}{c}\overset{12}{cc}\\ \overset{21}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-1}{X} + \begin{array}{c}\overset{13}{cc}\\ \overset{22}{cc}\\ \overset{31}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-2}{X} + \begin{array}{c}\overset{14}{cc}\\ \overset{23}{cc}\\ \overset{32}{cc}\\ \overset{41}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-3}{X} + \begin{array}{c}\overset{15}{cc}\\ \overset{24}{cc}\\ \overset{33}{cc}\\ \overset{42}{cc}\\ \overset{51}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-4}{X} + \begin{array}{c}\overset{16}{cc}\\ \overset{25}{cc}\\ \overset{34}{cc}\\ \overset{43}{cc}\\ \overset{52}{cc}\\ \overset{61}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-5}{X} + \begin{array}{c}\overset{17}{cc}\\ \overset{26}{cc}\\ \overset{35}{cc}\\ \overset{44}{cc}\\ \overset{53}{cc}\\ \overset{62}{cc}\\ \overset{71}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-6}{X} + \ldots
$$

$$
= \overset{11}{cc}\,{}^2\overset{u}{X} + 2\,\overset{12}{cc}\,{}^2\overset{u-1}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{13}{cc}\\ \overset{22}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-2}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{14}{cc}\\ 2\,\overset{23}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-3}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{15}{cc}\\ 2\,\overset{24}{cc}\\ \overset{33}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-4}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{16}{cc}\\ 2\,\overset{25}{cc}\\ 2\,\overset{34}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-5}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{17}{cc}\\ 2\,\overset{26}{cc}\\ 2\,\overset{35}{cc}\\ \overset{44}{cc}\end{array}{}^2\overset{u-6}{X} + \ldots
$$

$$
{}^5\overset{u}{X} = \overset{1}{c}\,{}^4\overset{u}{X} + \overset{2}{c}\,{}^4\overset{u-1}{X} + \overset{3}{c}\,{}^4\overset{u-2}{X} + \overset{4}{c}\,{}^4\overset{u-3}{X} + \overset{5}{c}\,{}^4\overset{u-4}{X} + \overset{6}{c}\,{}^4\overset{u-5}{X} + \overset{7}{c}\,{}^4\overset{u-6}{X} + \ldots
$$

$$
= \overset{111}{ccc}\,{}^2\overset{u}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{122}{ccc}\\ \overset{211}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-1}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{113}{ccc}\\ \overset{122}{ccc}\\ \hline 2\,\overset{212}{ccc}\\ \overset{311}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-2}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{114}{ccc}\\ 2\,\overset{123}{ccc}\\ \hline 2\,\overset{213}{ccc}\\ \overset{222}{ccc}\\ 2\,\overset{312}{ccc}\\ \overset{411}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-3}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{115}{ccc}\\ 2\,\overset{124}{ccc}\\ \overset{133}{ccc}\\ \hline 2\,\overset{214}{ccc}\\ 2\,\overset{223}{ccc}\\ 2\,\overset{313}{ccc}\\ \overset{322}{ccc}\\ 2\,\overset{412}{ccc}\\ \overset{511}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-4}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{116}{ccc}\\ 2\,\overset{125}{ccc}\\ 2\,\overset{134}{ccc}\\ \hline 2\,\overset{215}{ccc}\\ 2\,\overset{224}{ccc}\\ \overset{233}{ccc}\\ 2\,\overset{314}{ccc}\\ 2\,\overset{323}{ccc}\\ 2\,\overset{413}{ccc}\\ \overset{422}{ccc}\\ 2\,\overset{512}{ccc}\\ \overset{611}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-5}{X} + \begin{array}{c}2\,\overset{117}{ccc}\\ 2\,\overset{126}{ccc}\\ 2\,\overset{135}{ccc}\\ \overset{144}{ccc}\\ \hline 2\,\overset{216}{ccc}\\ 2\,\overset{225}{ccc}\\ 2\,\overset{234}{ccc}\\ 2\,\overset{315}{ccc}\\ 2\,\overset{324}{ccc}\\ \overset{333}{ccc}\\ 2\,\overset{414}{ccc}\\ 2\,\overset{423}{ccc}\\ 2\,\overset{513}{ccc}\\ \overset{522}{ccc}\\ 2\,\overset{612}{ccc}\\ \overset{711}{ccc}\end{array}{}^2\overset{u-6}{X} + \ldots
$$

Also ist

$$\overset{u}{{}_5X} = \overset{111}{ccc}\,{}_2\overset{u}{X} + 3\overset{112}{ccc}\,{}_2\overset{u-1}{X} + \begin{array}[t]{l} 3\overset{113}{ccc} \\ 3\overset{122}{ccc} \end{array} {}_2\overset{u-2}{X} + \begin{array}[t]{l} 3\overset{114}{ccc} \\ 6\overset{123}{ccc} \\ \overset{222}{ccc} \end{array} {}_2\overset{u-3}{X} + \begin{array}[t]{l} 3\overset{115}{ccc} \\ 6\overset{124}{ccc} \\ 3\overset{133}{ccc} \\ 3\overset{223}{ccc} \end{array} {}_2\overset{u-4}{X} + \begin{array}[t]{l} 3\overset{116}{ccc} \\ 6\overset{125}{ccc} \\ 6\overset{134}{ccc} \\ 6\overset{215}{ccc} \\ 3\overset{224}{ccc} \\ 3\overset{233}{ccc} \end{array} {}_2\overset{u-5}{X} + \begin{array}[t]{l} 3\overset{117}{ccc} \\ 6\overset{126}{ccc} \\ 6\overset{135}{ccc} \\ 3\overset{144}{ccc} \\ 3\overset{225}{ccc} \\ 6\overset{234}{ccc} \\ \overset{333}{ccc} \end{array} {}_2\overset{u-6}{X} + \ldots$$

Hieraus findet man auf eben diese Art

$$\overset{u}{{}_6X} = \overset{1111}{cccc}\,{}_2\overset{u}{X} + 4\overset{1112}{cccc}\,{}_2\overset{u-1}{X} + \begin{array}[t]{l} 4\overset{1113}{cccc} \\ 6\overset{1122}{cccc} \end{array} {}_2\overset{u-2}{X} + \begin{array}[t]{l} 4\overset{1114}{cccc} \\ 12\overset{1123}{cccc} \\ 4\overset{1222}{cccc} \end{array} {}_2\overset{u-3}{X} + \begin{array}[t]{l} 4\overset{1115}{cccc} \\ 12\overset{1124}{cccc} \\ 6\overset{1133}{cccc} \\ 12\overset{1223}{cccc} \\ \overset{2222}{cccc} \end{array} {}_2\overset{u-4}{X} + \begin{array}[t]{l} 4\overset{1116}{cccc} \\ 12\overset{1125}{cccc} \\ 12\overset{1134}{cccc} \\ 12\overset{1224}{cccc} \\ 4\overset{2223}{cccc} \end{array} {}_2\overset{u-5}{X} + \begin{array}[t]{l} 4\overset{1117}{cccc} \\ 12\overset{1126}{cccc} \\ 12\overset{1135}{cccc} \\ 6\overset{1144}{cccc} \\ 12\overset{1225}{cccc} \\ 24\overset{1234}{cccc} \\ 4\overset{2224}{cccc} \\ 6\overset{2233}{cccc} \end{array} {}_2\overset{u-6}{X} + \ldots$$

$$\overset{u}{{}_7X} = \overset{11111}{ccccc}\,{}_2\overset{u}{X} + 5\overset{11112}{ccccc}\,{}_1\overset{u-1}{X} + \begin{array}[t]{l} 5\overset{11113}{ccccc} \\ 10\overset{11122}{ccccc} \end{array} {}_2\overset{u-2}{X} + \begin{array}[t]{l} 5\overset{11114}{ccccc} \\ 20\overset{11123}{ccccc} \\ 10\overset{11222}{ccccc} \end{array} {}_2\overset{u-3}{X} + \begin{array}[t]{l} 5\overset{11115}{ccccc} \\ 20\overset{11124}{ccccc} \\ 10\overset{11133}{ccccc} \\ 30\overset{11223}{ccccc} \\ 5\overset{12222}{ccccc} \end{array} {}_2\overset{u-4}{X} + \begin{array}[t]{l} 5\overset{11116}{ccccc} \\ 20\overset{11125}{ccccc} \\ 20\overset{11134}{ccccc} \\ 30\overset{11224}{ccccc} \\ 30\overset{11233}{ccccc} \\ 20\overset{12223}{ccccc} \\ \overset{22222}{ccccc} \end{array} {}_2\overset{u-5}{X} + \begin{array}[t]{l} 5\overset{11117}{ccccc} \\ 20\overset{11126}{ccccc} \\ 20\overset{11135}{ccccc} \\ 10\overset{11144}{ccccc} \\ 30\overset{11225}{ccccc} \\ 60\overset{11234}{ccccc} \\ 20\overset{12224}{ccccc} \\ 30\overset{12233}{ccccc} \\ 5\overset{22223}{ccccc} \end{array} {}_2\overset{u-6}{X} + \ldots$$

Man sieht hieraus, daſs diese Reduction ohne groſse Mühe sich auf die Zahlen ${}_8\overset{u}{X}$, ${}_9\overset{u}{X}$, ${}_{10}\overset{u}{X}$ etc. fortsetzen läſst. Hat man aber einmal eine solche Reduction vorgenommen; so ist die Berechnung eines jeden Coefficienten, ja eines jeden Gliedes desselben ganz leicht, besonders wenn man die Werthe ${}_2\overset{u}{X}$, ${}_2\overset{u-1}{X}$ etc. ein für allemal auf die kürzeste Art folgendermaaſsen bestimmt:

$$
{}_2\overset{1}{X}=\overset{11}{cc},\quad
{}_2\overset{2}{X}=2\overset{12}{cc},\quad
{}_2\overset{3}{X}=2\overset{13}{cc}+\overset{22}{cc},\quad
{}_2\overset{4}{X}=2\overset{14}{cc}+2\overset{23}{cc},\quad
{}_2\overset{5}{X}=2\overset{15}{cc}+2\overset{24}{cc}+\overset{33}{cc},
$$

$$
{}_2\overset{6}{X}=2\overset{16}{cc}+2\overset{25}{cc}+2\overset{34}{cc},\quad
{}_2\overset{7}{X}=2\overset{17}{cc}+2\overset{26}{cc}+2\overset{35}{cc}+\overset{44}{cc},\quad
{}_2\overset{8}{X}=2\overset{18}{cc}+2\overset{27}{cc}+2\overset{36}{cc}+2\overset{45}{cc},
$$

$$
{}_2\overset{9}{X}=2\overset{19}{cc}+2\overset{28}{cc}+2\overset{37}{cc}+2\overset{46}{cc}+\overset{55}{cc},\quad
{}_2\overset{10}{X}=2\overset{1\,10}{cc}+2\overset{29}{cc}+2\overset{38}{cc}+2\overset{47}{cc}+2\overset{56}{cc}
$$

u. s. w.

Gesetzt z. B. man verlangt das 6te Glied des 10ten Coefficienten $\overset{10}{x}$, so ist dasselbe nach Zus. 3.

$$
={}^6\mathfrak{B}\left(\overset{1}{c}\,{}_5\overset{5}{X}+\overset{2}{c}\,{}_5\overset{4}{X}+\overset{3}{c}\,{}_5\overset{3}{X}+\overset{4}{c}\,{}_5\overset{2}{X}+\overset{5}{c}\,{}_5\overset{1}{X}\right),\text{ also}
$$

$$
={}^6\mathfrak{B}\left(\overset{1111}{cccc}\right)\times\left[\begin{matrix}2\overset{15}{cc}\\+2\overset{24}{cc}\\+\overset{33}{cc}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}3\overset{1112}{cccc}\\+\overset{2111}{cccc}\end{matrix}\right]\times\left[\begin{matrix}2\overset{14}{cc}\\\overset{23}{cc}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}3\overset{1113}{cccc}\\+3\overset{1122}{cccc}\\+3\overset{2112}{cccc}\\+\overset{3111}{cccc}\end{matrix}\right]\times\left[\begin{matrix}2\overset{13}{cc}\\+\overset{22}{cc}\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}3\overset{1114}{cccc}\\+6\overset{1123}{cccc}\\+\overset{1222}{cccc}\\+3\overset{2113}{cccc}\\+3\overset{2122}{cccc}\\+3\overset{3112}{cccc}\\+\overset{4111}{cccc}\end{matrix}\right]\times2\overset{12}{cc}+\left[\begin{matrix}3\overset{1115}{cccc}\\+6\overset{1124}{cccc}\\+3\overset{1133}{cccc}\\+3\overset{1223}{cccc}\\+3\overset{2114}{cccc}\\+6\overset{2123}{cccc}\\+\overset{2222}{cccc}\\+3\overset{3113}{cccc}\\+3\overset{3122}{cccc}\\+3\overset{4112}{cccc}\\+\overset{5111}{cccc}\end{matrix}\right]\times\overset{11}{cc}
$$

Also hat man ganz leicht das sechste Glied des 10^{ten} Coefficienten

$$= {}^{6}\mathfrak{B}\,(6\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{5}{c} + 30\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{4}{c} + 15\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{3}{c} + 60\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} + 15\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c})$$

Dieses Beyspiel zeigt deutlich, wie man nach diesem Verfahren im Stande ist, ohne zu grofse Mühe die Berechnung bis zum 15^{ten}, 20^{sten} und höhern Coefficienten anzustellen, obgleich sich von selbst versteht, dafs, nach dem viel umfassenden Inhalt des polynomischen Problems, auch bey dem allerleichtesten Verfahren die Berechnung der Coefficienten, ja dafs blofse Hinschreiben derselben natürlicher Weise Zeit und Mühe erfordert, und zwar desto mehr, aus je mehrern Theilen das Polynomium besteht, und je gröfser die Ordnungszahl der Coefficienten wird.

Anmerkung 4.

Es ist von selbst klar, dafs die angezeigte zweyte Methode eben so wie die erste ganz auf dem gewöhnlichen Wege der Analysis bleibt, und die gesuchten Coefficienten durch blofse Substitutionen liefert, ohne auf die regelmäfsigen *Combinationen* der Factoren, die sich bey der Entwickelung der Partialproducte in ihrer Folgenreihe äufsern, die geringste Rücksicht zu nehmen. Allein diese liegen hier ganz völlig entwickelt so offenbar da, dafs, wenn man auch der Rücksicht auf dieselben mit Fleifs ausweichen wollte, sie sich dennoch gleichsam mit Gewalt aufdringen, und eben hierin setze ich den grösesten Vorzug meiner allgemeinen Auflösung, dafs, ob sie gleich den Zweck hatte, sich nicht von dem Wege der gewöhnlichen Analysis zu entfernen, sondern die Entwickelung der Coefficienten durch blofse Substitutionen zu bewirken, sie nicht nur das letzte auf eine unerwartet leichte Art leistet, sondern zugleich sofort unmittelbar zeigt, dafs das polynomische Problem eigentlich ganz *combinatorisch* ist. Schon bey der Berechnung der sechs ersten Coefficienten nach der ersten Methode zeigte sich, da ich in der Entwickelung der Partialproducte in Rücksicht der Factorenfolge mich strenge nach der Vorschrift richtete, dieses ganz auffallend, und bey der nach der zweyten Methode umständlich dargestellten Entwickelung des siebenten Coefficienten zeigt der natürliche Gang der Substitutionen ganz evident, dafs alle diese Substitutionen sich selbst entbehrlich machen, und zur Entwickelung

aller Partialproducte nichts weiter nöthig sey, als die Verbindung ihrer Factoren nach einer sich von selbst ergebenden leichten Regel nach einander hinzuschreiben. Um diese Regel desto deutlicher und kürzer zu übersehen, wollen wir den Buchstaben *c* ganz weglassen, und statt $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$, $\overset{2}{c}$ etc. bloſs die Ordnungszahlen 1, 2, 3 etc. gebrauchen, so daſs 1 den ersten gegebenen Coefficienten *a*, 2 den zweyten b etc. bedeute. Alsdenn ist

$$\overset{7}{x} = {}^{1}\mathfrak{B}.7 + {}^{2}\mathfrak{B}.1.6 + {}^{3}\mathfrak{B}.1.1.5 + {}^{4}\mathfrak{B}.1.1.1.4 + {}^{5}\mathfrak{B}.1.1.1.1.3 + {}^{6}\mathfrak{B}.1.1.1.1.1.2 + {}^{7}\mathfrak{B}.1.1.1.1.1.1.1.$$

2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
3.4	3.3	3.2	3.1	2.1.1
4.3	4.2	4.1	2.1.2	2.1.1.1
5.2	5.1	2.1.3	2.1	2.1.1.1.1
6.1	2.1.4	2.2	3.1.1	2.1.1.1.1.1
	2.3	3.1	2.1.1.2	
	3.2	3.1.2	2.1	
	4.1	2.1	2.1.1	
	3.1.3	4.1.1	3.1.1.1	
	2.2	2.1.1.3	2.1.1.1.2	
	3.1	2.2	2.1	
	4.1.2	3.1	2.1.1	
	2.1	2.1.2	2.1.1.1	
	5.1.1	2.1	3.1.1.1.1	
		3.1.1		
		3.1.1.2		
		2.1		
		2.1.1		
		4.1.1.1		

Hier ist nun klar, daſs

1. In jedem Gliede der Coefficienten jedes Partialproduct so viel Factoren enthält, als die Ordnungszahl des Gliedes anzeigt, mithin zu jeder Combination auch eben so viel Zahlen gehören, nämlich im zweyten Gliede 2, im dritten 3 etc.
2. Daſs in jeder Combination die Summe aller Zahlen beständig der Ordnungszahl des Coefficienten gleich ist, z. B. $= 7$ in $\overset{7}{x}$.

3. Dafs für den Coefficienten $\overset{r}{x}$ in der *ersten* Combination eines jeden m^{ten} Gliedes die gröfseste Zahl zur Rechten $= r - (m - 1)$, die übrigen zur Linken aber alle $= 1$ sind, z. B. in der ersten Combination des fünften Gliedes von $\overset{7}{x}$ ist die gröfseste Zahl $= 7 - 4 = 3$.

4. Dafs zur Darstellung aller Partialproducte für jedes m^{te} Glied des r^{ten} Coefficienten nichts weiter nöthig ist, als *die Zahl* r *in* m *Theile so viele male zu zerfällen, als es irgend angeht, so dafs diese Zerfällungen alle mögliche Combinationen und Permutationen der Theile zugleich enthalten.*

Dieses letzte Verfahren macht nun die *dritte* Methode unserer Auflösung aus, die unter den combinatorischen die erste ist, und dieses Verfahren ist schon aus dem Schema für $\overset{7}{x}$ so unmittelbar einleuchtend, dafs jede discursive Vorschrift dasselbe nur verwirren würde. Die Leichtigkeit, durch welche sich diese Methode vor allen bekannten Substitutionsmethoden, und selbst vor der *ersten* meinigen auszeichnet, ist also sichtbar, indem man alle gesuchte Partialproducte, fast ohne dabey zu denken, nur mechanisch nach der Reihe hinschreiben darf. Indessen ist mit derselben von einer andern Seite doch eine doppelte nicht unbedeutende Beschwerde verknüpft. Denn da die angezeigte Art der Zerfällungen nicht nur die verschiedenen Combinationen, sondern zugleich alle mögliche Permutationen der Theile in sich enthält, so wird erstlich bey den Coefficienten von einer beträchtlichen Ordnungszahl die Anzahl dieser hinzuschreibenden Partialproducte sehr grofs, und da aus eben dem Grunde sehr viele Producte ganz einerley Factoren enthalten, mithin einander gleich sind; so ist es zweytens noch nöthig, die gleichen Producte von jeder Art besonders aufzusuchen und genau zusammen zu zählen — eine Arbeit, die nicht nur mühsam und verdriefslich ist, sondern noch das unangenehme hat, dafs man bey aller angewandten Sorgfalt doch in Furcht bleibt, sich etwa irgendwo versehen zu haben. Es scheint zwar, dafs man der letzten Beschwerde dadurch ausweichen könnte, wenn man unter allen gefundenen Partialproducten nur diejenigen aussonderte, die mit keinem andern ganz einerley Factoren haben, und nachher durch den oben angeführten Permutationssatz ganz leicht berechnete, wie viel

man in jedem derselben sich seine Factoren verwechseln lassen. Allein hier würde man, wenn die Menge der Partialproducte sehr grofs wäre, doch immer besorgen müssen, auch bey dieser Aussonderung sich etwa versehen zu haben. Wollte man aber diese Besorgnifs völlig vermeiden; so würde diese dritte Methode sich selber ganz entbehrlich machen, indem sie eben bey dieser Reflexion unmittelbar auf eine von ihr ganz verschiedene *vierte* Methode leitet, bey welcher eine weit kleinere Anzahl von Combinationen nöthig ist.

Diese *vierte* Methode, das m^{te} Glied des r^{ten} Coefficienten zu finden, welche unter den combinatorischen die zweyte ist, besteht darin, dafs man 1) bey der Zerfällung der Zahl r in m Theile von allen Permutationen gänzlich abstrahirt, und daher *blofs diejenigen Zerfällungen nach der Ordnung darstellt, welche mit keiner andern ganz einerley Theile enthalten, so dafs daher in jeder Zerfällung keine Zahl zur Rechten kleiner seyn mufs, als irgend eine von denen zur Linken*, und dann 2) *nach dem oben angeführten Permutationssatz berechnet, wie vielmal sich in jeder Zerfällung als einem Partialproduct, die Theile als Factoren verwechseln lassen.* Das Verfahren, welches diese besondere Art von Zerfällungen erfordert, ist ebenfalls ganz leicht, und schon an sich einleuchtend. Um aber vor aller Furcht, sich dabey zu versehen, völlig sicher zu seyn, darf man nur folgende leichte Regeln beobachten. Will man nämlich das m^{te} Glied des r^{ten} Coefficienten, so setze man

1) In der ersten Combination, mit welcher man anfängt, in die erste Stelle zur Rechten die Zahl $r-(m-1)$, die wir u nennen wollen, und ihr zur Linken $m-1$ Einheiten; so ist die Summe der beyden ersten Ziffern zur Rechten $= u+1$.

2) Die Zahl $u+1$ zerfälle man, so vielmal es angeht, in 2 Theile, nämlich:

$$1 . u$$
$$2 . u - 1$$
$$3 . u - 2 \text{ u. s. w.}$$

bis man auf solche zwey Theile kommt, die entweder gleich sind, oder um 1 differiren; so hat man alle verlangte Zerfällungen der Zahl $(u+1)$ in zwey Theile.

3. Alsdann setze man in der dritten Stelle statt 1 die Zahl 2, in der zweyten gleichfalls 2, in der ersten $u-2$, und zerfälle die Zahl

u eben so, wie No. 2. mit der Zahl $(u+1)$ geschahe, wieder, so vielmal es angeht, in zwey Theile. Hierauf setze man statt der vorigen 2 in der dritten Stelle die Zahl 3, in der zweyten gleichfalls 3, und in der ersten $u-4$, und zerfälle die Zahl $(u-1)$ wieder eben so in zwey Theile. Auf diese Art vergröſsere man die Zahl in der dritten Stelle immer um 1; und verfahre eben so, jedoch nur so lange, als die Summe der drey ersten Zahlen noch kleiner als $u+3$ wird; so hat man alle Zerfällungen der Zahl $(u+2)$ in drey Theile.

4. Hierauf gehe man zur vierten Stelle, setze in derselben statt 1 die Zahl 2, in der dritten und zweyten gleichfalls 2, und in der ersten $u-3$, und zerfälle die Zahl $(u+1)$ nach der Vorschrift No. 3., so vielmal es angeht, in drey Theile; so hat man alle Zerfällungen der Zahl $(u+1)$ in vier Theile.

5. Geht man auf dieselbe Art bis zur m^{ten} Stelle fort; so hat man alle Zerfällungen der Zahl r in m Theile.

Gesetzt z. B. man verlangt das sechste Glied des 15^{ten} Coefficienten; so ist hier $r=15$, $m=6$, folglich $u=10$, also sind hier die verlangten Zerfällungen folgende:

1.1.1.1.1.10 (u)
2.9
3.8
4.7
5.6
———
2.2.8 $(u-2)$
3.7
4.6
5.5
———
3.3.6
4.5
———
4.4.4
———

1.1.2.2.2.7 $(u-3)$
3.6
4.5
———
3.3.5
4.4
———
3.3.3.4
———
1.2.2.2.2.6 $(u-4)$
3.5
4.4
———
3.3.4
———
3.3.3.3
———
2.2.2.2.2.5 $(u-5)$
3.4
———
3.3.3

Hier kommt nun in der ersten Combination die Zahl Eins 5 mal, in den vier folgenden 4 mal, in der sechsten die Eins 3 mal, und die Zwey 2 mal, in der siebenten bloſs die Eins 3 mal vor, also finden, nach dem Permutationssatze, in der ersten 6, in den vier folgenden 30, in der sechsten 60, und in der siebenten 120 Permutationen statt.

Bestimmt man auf diese Art die Zahl der möglichen Permutationen für alle übrigen Combinationen; so ist das gesuchte sechste Glied des 15^{ten} Coefficienten

$$= {}^6\mathfrak{B}[6a^5k + 30a^4(bi + ch + dg + ef) + 60a^3b^2h$$
$$+ 120a^3b(cg + df) + 60a^3(be^2 + c^2f) + 120a^3cde$$
$$+ 20a^3d^3 + 60a^2b^3g + 180a^2b(bcf + bde + c^2e + cd^2)$$
$$+ 60a^2c^3d + 30ab^4f + 120ab^3ce + 60ab^3d^2$$
$$+ 180ab^2c^2d + 30abc^4 + 6b^5e + 30b^4cd + 20b^3c^3].$$

Aus diesem Beyspiele ist einleuchtend, theils wie leicht die verlangten Zerfällungen sind, theils wie wenige derselben erfordert werden, indem hier nur 26 nöthig sind, in welchen die Berechnung der möglichen Permutationen fast keine Mühe macht, da man hingegen nach der dritten Methode 2002 Combinationen hinschreiben, und unter diesen nachher diejenigen, die ganz einerley Zahlen enthalten, noch mühsam aussondern und zusammenzählen müſste. Diese vierte Methode ist also unwidersprechlich die allerleichteste und vortreflichste, die man nur wünschen kann. Zwar kommt derselben das zuletzt angezeigte Verfahren der zweyten Methode an Leichtigkeit auſserordentlich nahe. Allein wenn man die Partialproducte, die man durch die nach dieser vorgenommenen leichten Reductionen und Substitutionen erhält, mit der vierten Methode vergleicht; so fällt es sogleich in die Augen, daſs es ganz dieselben sind, welche die vierte Methode darstellt, und daſs man also bey der Reduction von ${}^m\overset{u}{X}$ auf ${}^2\overset{u}{X}$ keine Rücksicht auf die vorhergehenden ${}^{m-1}\overset{u}{X}$, ${}^{m-2}\overset{u}{X}$ etc. zu nehmen braucht, sondern den Werth von ${}^m\overset{u}{X}$ unabhängig von ${}^{m-1}\overset{u}{X}$, ${}^{m-2}\overset{u}{X}$ etc. nach der vierten Methode unmittelbar finden kann, ja daſs daher alle jene Re-

ductionen auf $^{2}\overset{u}{X}$ und die nachherige Substitution des Werths von $^{2}\overset{u}{X}$ gar nicht einmal nöthig sind, indem man nach der vierten Methode jedes Glied des Coefficienten, ohne weitere Vorbereitung unmittelbar erhält, wie dieses die obige Berechnung des sechsten Gliedes im zehnten Coefficienten augenscheinlich zeigt. Es zeigt sich also hier das Auffallende, dafs selbst die vollkommenste *Substitutionsmethode*, für welche ich die zweyte ohne Bedenken halte, sich bey der wirklichen Berechnung der Coefficienten selbst für entbehrlich erklären, und der vierten Methode den Vorzug zugestehen mufs.

Diese vortrefliche combinatorische Methode nebst der dritten erfand zuerst Herr Professor *Hindenburg*, und zwar auf einem schon *combinatorisch* angelegten Wege. Blofs dieser letzte Umstand konnte also den Gedanken in mir übrig lassen, nach einer schon vorhandenen unübertreffbaren Methode noch eine neue Auflösung des polynomischen Problems zu versuchen. Denn mein Wunsch ging, wie schon gesagt, blofs dahin, ohne Differentialrechnung, mittelst welcher Colson, Euler und Kästner dasselbe aufgelöset haben, blofs auf dem gewöhnlichen Wege der gemeinen Analysis, eine solche Auflösung zu finden, die auch Anfängern, welche mit der neuen Hindenburgschen Combinationslehre noch unbekannt sind, fafslich, und nicht so verwickelt wäre, als die Moivresche, gesetzt auch, dafs die Methode, die Coefficienten selbst zu entwickeln, der Hindenburgschen an Bequemlichkeit nachstünde. Allein desto überraschender war mir das Vergnügen, auf einem so leichten und kurzen Wege für die gröfseste Allgemeinheit des Exponenten nicht nur zwey Substitutionsmethoden, von denen die zweyte der Hindenburgschen an Leichtigkeit schon so aufserordentlich nahe kommt, zu finden, sondern zugleich sofort wahrzunehmen, dafs diese die Hindenburgschen Combinationsmethoden unmittelbar in sich enthalten, und dafs also meine Auflösung den Anfänger, ohne alle Vorkenntnisse der Combinationslehre, auf jene unmittelbar leitet, und ihm dadurch ihre Vollkommenheit desto einleuchtender darstellt, mithin ihn desto mehr aufmuntern mufs, sich mit der Hindenburgschen Combinationstheorie selbst bekannt zu machen. Indessen ist die Erfindung dieser vortreflichen Methode noch immer nur Herrn Hindenburgs kleinstes Verdienst, denn gesetzt auch,

dafs sie ihm nicht geglückt wäre; so würde der ganze Nachtheil blofs der gewesen seyn, dafs sie wenige Jahre später erfunden wäre. Sein unsterbliches Hauptverdienst ist vielmehr der scharfsinnige und wichtige Gebrauch, den er von dieser Erfindung zu machen gewufst, indem sie ihn zur sinnreichen Erfindung der sogenannten *Involutionen*, und hiedurch nicht nur zu einer vollständigen neuen Combinationstheorie und *combinatorischen Charakteristik*, sondern mittelst dieser zu einer ganz neuen Art von Analysis, nämlich zur *combinatorischen Analytik* geleitet hat, deren grofse Nutzbarkeit in bequemer Auflösung der schwersten und verwickeltsten Probleme, nicht nur von ihm und mehrern seiner würdigen Schüler, sondern auch von andern berühmten Mathematikern durch die That selbst bereits vollkommen bestätigt worden.

Anmerkung 5.

Von einer vieltheiligen oder polynomischen Zahl p lassen sich überhaupt folgende allgemeine verschiedene Formen denken:

1. $p = a + b + c + d + e + \ldots,$

wo jedes Glied von den andern ganz unabhängig ist, und daher bedeuten kann, was man will.

2. $p = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \ldots.$

3. $p = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots,$ oder ganz allgemein

4. $p = au^e + bu^{e+w} + cu^{e+2w} + du^{e+3w} + \ldots,$

wo in den letzten drey Fällen die Zahlen a, b, c etc. nach gewissen Potenzen von z, oder u^e geordnet, und durch diese zu multipliciren sind.

Von allen diesen vier Arten der vieltheiligen Zahl p aber läfst sich, wie Zus. 5. 6. 7. gezeigt worden, die n^{te} Potenz unmittelbar aus der n^{ten} Potenz von $p = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \ldots$ herleiten. Diese fünfte Form, deren sich bey Auflösung des polynomischen Problems zuerst *Kästner*, und nachher auch Hr. *Hindenburg* mit so grofsem Vortheil bedient haben, ist daher die *einfachste*, und als das

Element aller übrigen anzusehen, und da sie die Auflösung so sehr simplificirt; so habe ich dieselbe hier gleichfalls zum Grunde gelegt. Nachdem ich gegenwärtige Auflösung auf dem analytischen Wege gefunden hatte, glückte es mir kurz darauf, auch den *synthetischen* oder *elementarischen* Beweis des polynomischen Lehrsatzes für die noch allgemeinere dritte Form $p = a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots$ auf eine ausserordentlich leichte und kurze Art zu finden, und denselben mittelst der schon lange vorher eben so leicht von mir erwiesenen Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes zur völligen Allgemeinheit für jeden Exponenten zu erheben, welchen ich daher um die Materie vollständig zu behandeln, in der folgenden dritten Abhandlung hier beyfüge.

III.

Sehr leichter und kurzer allgemeiner synthetischer Beweis des binomischen und polynomischen Lehrsatzes.

Erklärung.

§. 1.

Wenn man die n^{te} Potenz der zweytheiligen oder binomischen Zahl $a+b$, d. i.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4} b^4 + \ldots$$

setzt; so heiſst diese Formel der *binomische Lehrsatz* für $(a+b)^n$, und die Coefficienten der Potenzen von a, b heiſsen die *Binomialcoefficienten*.

Zusatz. Also ist im binomischen Lehrsatz das erste Glied, dessen Coefficient 1 ist, $= a^n$, jedes folgende m^{te} Glied aber

$$= \frac{n.n-1.n-2\ldots n-(m-2)}{1.2.3\ldots m-1} a^{n-(m-1)} b^{m-1}.$$

Lehrsatz 1.

§. 2. Wenn der Exponent n eine *positive ganze Zahl* ist; so ist der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$ richtig.

Beweis. Denn $(a+b)^{r+1} = (a+b)^r.(a+b)$. Man setze also, der binomische Lehrsatz sey für $(a+b)^r$ wahr, und multiplicire

$$a^r + \frac{r}{1} a^{r-1} b + \frac{r.r-1}{1.2} a^{r-2} b^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} a^{r-3} b^3 + \frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4} a^{r-4} b^4 + \ldots$$

durch $a+b$; so ist

$$(a+b)^{r+1} = a^{r+1} + \left\{\begin{matrix} \frac{r}{1} \\ +1 \end{matrix}\right\} a^r b + \left\{\begin{matrix} \frac{r.r-1}{1.2} \\ +\frac{r}{1} \end{matrix}\right\} a^{r-1} b^2 + \left\{\begin{matrix} \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \\ +\frac{r.r-1}{1.2} \end{matrix}\right\} a^{r-2} b^3 + \left\{\begin{matrix} \frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4} \\ +\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \end{matrix}\right\} a^{r-3} b^4 + \ldots$$

Nun ist $\frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r}{1} = \frac{r+1.r}{1.2}$, $\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + \frac{r.r-1}{1.2} = \frac{r+1.r.r-1}{1.2.3}$, $\frac{r.r-1.r-2.r-3}{1.2.3.4} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} = \frac{r+1.r.r-1.r-2}{1.2.3.4}$ u. s. w.

Also ist

$$(a+b)^{r+1} = a^{r+1} + \frac{r+1}{1} a^r b + \frac{r+1.r}{1.2} a^{r-1} b^2 + \frac{r+1.r.r-1}{1.2.3} a^{r-2} b^3 + \frac{r+1.r.r-1.r-2}{1.2.3.4} a^{r-3} b^4 + ..$$

Ist daher der binomische Lehrsatz für $(a+b)^r$ wahr, so ist er auch für $(a+b)^{r+1}$ wahr (§. 1.). Nun aber ist er für $(a+b)^1$ wahr, weil

$$(a+b)^1 = a^1 + \frac{1}{1} a^{1-1} b + \frac{1.0}{1.2} a^{1-2} b^2 + \frac{1.0.-1}{1.2.3} a^{1-3} b^3 + \ldots \text{ (§. 1.)}$$

$= a + a^0 b = a + b$ ist, folglich ist er auch für $(a+b)^{1+1}$ d. i. für $(a+b)^2$ wahr, mithin auch für $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ u. s. w., also überhaupt für $(a+b)^n$, die positive ganze Zahl n sey, welche man wolle.

Zusatz. Wenn der Exponent n eine positive ganze Zahl ist; so wird, wenn $m = n+2$ ist, $n - (m - 2) = 0$, folglich wird hier das $(n+2)^{te}$ Glied, mithin auch jedes folgende $= 0$. (§. 1. Z.). Also enthält in diesem Fall der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$ nur $n+1$ Glieder.

Lehrsatz 2.

§. 3. Wenn der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$ und für $(a+b)^r$ allgemein richtig ist, die Exponenten n, r mögen positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, mögliche oder imaginaire Zahlen seyn; so ist er auch eben so allgemein für $(a+b)^{n+r}$ richtig.

Beweis. Denn $(a+b)^{n+r} = (a+b)^n . (a+b)^r$. Ist daher

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

$$(a+b)^r = a^r + \frac{r}{1} a^{r-1} b + \frac{r.r-1}{1.2} a^{r-2} b^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} a^{r-3} b^3 + \ldots$$

so ist

$$(a+b)^{n+r} = a^{n+r} + \left\{\begin{matrix} \frac{n}{1} \\ +\frac{r}{1} \end{matrix}\right\} a^{n+r-1} b + \left\{\begin{matrix} \frac{n.n-1}{1.2} \\ +\frac{n.r}{1.1} \\ +\frac{r.r-1}{1.2} \end{matrix}\right\} a^{n+r-2} b^2 + \left\{\begin{matrix} \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \\ +\frac{n.n-1.r}{1.2.1} \\ +\frac{n.r.r-1}{1.1.2} \\ +\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \end{matrix}\right\} a^{n+r-3} b^3 + \ldots$$

Nun ist (nach §. 2), wenn n, r positive ganze Zahlen sind,

$$(a+b)^{n+r} = a^{n+r} + \frac{n+r}{1} a^{n+r-1} b + \frac{(n+r).(n+r-1)}{1 \;.\; 2} a^{n+r-2} b^2$$

$$+ \frac{(n+r).(n+r-1).(n+r-2)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3} a^{n+r-3} b^3 + \ldots$$

Also sind in diesem Falle in beyden Formeln nicht nur die beyden ersten Coefficienten 1, $\frac{n+r}{1}$ einerley, sondern es ist auch der dritte Coefficient der ersten Formel $\frac{n.n-1}{1.2} + nr + \frac{r.r-1}{1.2}$ dem dritten der zweyten $\frac{n+r.n+r-1}{1 \;.\; 2}$, und eben so der vierte dem vierten, der fünfte dem fünften u. s. w. gleich. Allein sind die Coefficienten der ersten Formel denen der zweyten nach der Reihe gleich, wenn n, r positive ganze Zahlen sind; so muſs diese Gleichheit allgemein richtig seyn, was für Zahlen n, r irgend seyn mögen, indem aus der Natur der allgemeinen Multiplication von selbst klar ist, daſs, wenn man die Zahlen $\frac{n+r}{1}$, $\frac{n+r-1}{2}$, $\frac{n+r-2}{3}$ u. s. w. nach und nach durch einander multiplicirt, für die Producte immer derselbe Ausdruck herauskommen muſs, die Zahlen n, r mögen bedeuten, was man wolle. Ist also der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$ und $(a+b)^r$ allgemein wahr; so ist er auch für $(a+b)^{n+r}$ eben so allgemein wahr.

Zusatz 1. Wenn daher der binomische Lehrsatz allgemein für $(a+b)^r$ gilt, was für eine Zahl auch r seyn mag; so gilt er auch eben so allgemein für $(a+b)^{nr}$, n sey eine positive *ganze* Zahl, welche man wolle.

Denn da $(a+b)^{2r} = (a+b)^{r+r}$, $(a+b)^{3r} = (a+b)^{2r+r}$ u. s. w.; so gilt in diesem Fall der Satz allgemein für $(a+b)^{2r}$, folglich auch für $(a+b)^{3r}$, $(a+b)^{4r}$ u. s. w. (Lehrs. 2.) also überhaupt für $(a+b)^{nr}$.

Zusatz 2. Gilt daher der binomische Lehrsatz allgemein für $(a+b)^r$, welche Zahl auch r seyn mag; so gilt er auch eben so allgemein für $(a+b)^{r^n}$, wenn n eine positive *ganze* Zahl ist.

Denn man setze, er gelte allgemein für $(a+b)^{r^m}$, welche positive ganze Zahl auch m seyn mag; so gilt er auch eben so allgemein für $(a+b)^{r \cdot r^m}$ (Z. 1.) d. i. für $(a+b)^{r^{m+1}}$. Gilt er daher allgemein für $(a+b)^r$ d. i. für $(a+b)^{r^1}$; so gilt er auch für $(a+b)^{r^2}$, folglich auch für $(a+b)^{r^3}$ u. s. w., also überhaupt für $(a+b)^{r^n}$.

Lehrsatz 3.

§. 4. Der binomische Lehrsatz ist auch richtig, wenn der Exponent eine *negative* ganze Zahl $= -n$ ist.

Beweis. Denn $(a+b)^{-(r+1)} = (a+b)^{-r} \cdot (a+b)^{-1}$. Ist daher der Satz für $(a+b)^{-r}$ und $(a+b)^{-1}$ wahr; so ist er es auch für $(a+b)^{-(r+1)}$ (§. 3.) Nun ist er für $(a+b)^{-1}$ wahr, weil

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - + \ldots$$

$$= a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + a^{-5}b^4 - + \ldots$$

$$= a^{-1} + \frac{-1}{1} a^{-1-1} b + \frac{-1 \cdot -2}{1 \cdot 2} a^{-1-2} b^2 + \frac{-1 \cdot -2 \cdot -3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-1-3} b^3 + \frac{-1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{-1-4} b^4 + \ldots$$

Mithin ist er auch für $(a+b)^{-2}$, folglich auch für $(a+b)^{-3}$, $(a+b)^{-4}$ u. s. w., also überhaupt für $(a+b)^{-n}$, welche ganze Zahl auch n seyn mag.

Zusatz 1. Da nun $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$

$$= \frac{1}{a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots}$$

wofern n eine ganze Zahl ist (§. 1. 2), und $(a+b)^n$ in diesem Fall der wirkliche binomische Lehrsatz für den Exponenten $-n$ ist (Lehrs. 3); so bekommt man, wenn man 1 durch

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \ldots.$$

dividirt, zum Quotienten den binomischen Lehrsatz für $(a+b)^{-n}$. Nun aber ist aus der Natur der allgemeinen Division von selbst klar, dafs hier für den Quotienten immer dieselbe Formel heraus kommen mufs, n mag bedeuten, was man wolle. Also enthält erwähnter Quotient immer den binomischen Lehrsatz für $(a+b)^{-n}$, n mag eine Zahl seyn, welche man wolle.

Zusatz 2. Wenn daher der binomische Lehrsatz allgemein für $(a+b)^n$ richtig ist; was für eine Zahl auch der positive Exponent n seyn mag; so ist er auch eben so allgemein für $(a+b)^{-n}$ richtig.

Denn da $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$; so ist, wenn der binomische Lehrsatz für $(a+b)^n$ richtig ist, $(a+b)^{-n}$

$$= \frac{1}{a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots} \quad (\S.\ 1.)$$

Nun aber ist dieser Quotient allemal der binomische Lehrsatz für $(a+b)^{-n}$, was für eine Zahl auch n seyn mag. Also gilt der binomische Lehrsatz in jedem Fall, wo er für $(a+b)^n$ richtig ist, auch für $(a+b)^{-n}$.

Zusatz 3. Ist daher der binomische Lehrsatz allgemein für die einzelnen Exponenten r, u, v, w u. s. w. richtig, was diese auch für Zahlen seyn mögen; so ist er auch für $(a+b)^{(r-u+v-w+\ldots)}$ richtig.

Denn in diesem gilt er auch für $-u$, $-w$ u. s. w. (Z. 2.) folglich für $(a+b)^{r-u}$, folglich auch für $(a+b)^{r-u+v}$, mithin auch für $(a+b)^{r-u+v-w}$ u. s. w. (§. 3), also überhaupt für $(a+b)^{(r-u+v-w+\ldots)}$.

Lehrsatz 4.

§. 5. Der binomische Lehrsatz ist auch richtig, wenn der Exponent eine *gebrochene* positive oder negative Zahl $\frac{m}{n}$, oder $-\frac{m}{n}$ ist.

Beweis. Denn da $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} - + \ldots$; so ist

$(a+b)^{\frac{1}{n+1}} = (a+b)^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \ldots\right)}$. Ist daher der binomische Lehrsatz für den Exponenten $\frac{1}{n}$ wahr; so ist er es auch für die Exponenten $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^4}$, $\frac{1}{n^5}$ u. s. w. (§. 3. Zus. 2), folglich auch für $(a+b)^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \ldots\right)}$ d. i. für $(a+b)^{\frac{1}{n+1}}$. Nun aber gilt er für $(a+b)^{\frac{1}{1}}$ (§. 2), folglich auch für $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, folglich auch für $(a+b)^{\frac{1}{3}}$, $(a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. w., mithin überhaupt für $(a+b)^{\frac{1}{n}}$, also auch für $(a+b)^{m \cdot \frac{1}{n}}$ (§. 3. Z. 1), d. i. für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, und daher auch für $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ (§. 4. Z. 2.).

Erklärung 2.

§. 6. Eine Summe, die mehr als zwey Zahlen zu Summanden hat, heifst eine *polynomische* oder *vieltheilige* Zahl, imgleichen ein *Polynomium*, und wenn sie unendlich viele Summanden hat, eine *infinitomische* Zahl, oder ein *Infinitomium*.

Zusatz. Die polynomische oder infinitomische Zahl p kann überhaupt von zweyerley Art seyn, nämlich: jeder Theil derselben kann von den übrigen ganz unabhängig seyn, und daher bedeuten, was man will, z. B. $p = a+b+c+d+e+f+g+\ldots$, oder sie können an die Potenzen einer Zahl z als Factoren oder Coefficienten geknüpft, und nach diesen geordnet seyn, z. B. $p = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 + \ldots$

Diese Form des Polynomii ist viel allgemeiner, als die erstere, und begreift diese schon in sich, indem man nur $z = 1$ setzen darf. Wir wollen sie daher den übrigen zum Grunde legen. Um aber nicht erst aus der Ordnung der Buchstaben nachzählen, oder aus einem in dieser Rücksicht gemachten Index nachsuchen zu dürfen, der wievielste von den gegebenen Coefficienten ein jeder ist, sondern dieses unmittelbar zu erkennen, wollen wir jeden gegebenen Coefficienten durch c ausdrücken, und durch die Zahl *über* ihm anzeigen, der wievielste er in der Ordnung ist, nämlich: $\overset{1}{c} = b$, $\overset{2}{c} = c$. $\overset{3}{c} = d$, $\overset{4}{c} = e$, $\overset{5}{c} = f$ etc., und überhaupt $\overset{r}{c} =$ dem r^{ten} Coefficienten von z^r, und so verwandelt sich das zweyte Polynomium in dieses: $p = a + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$

Lehrsatz 5.

§. 7. Wenn $p = a + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \overset{5}{c}z^5 + \overset{6}{c}z^6 + \ldots$; so ist

$$p^2 = a^2 + 2a.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{matrix} 2a.\overset{2}{c} \\ + \overset{11}{cc} \end{matrix}\right\} z^2 + \left\{\begin{matrix} 2a.\overset{3}{c} \\ +2\overset{12}{cc} \end{matrix}\right\} z^3 + \left\{\begin{matrix} 2a.\overset{4}{c} \\ +2\overset{13}{cc} \\ + \overset{22}{cc} \end{matrix}\right\} z^4 + \left\{\begin{matrix} 2a.\overset{5}{c} \\ +2\overset{14}{cc} \\ +2\overset{23}{cc} \end{matrix}\right\} z^5 + \left\{\begin{matrix} 2a.\overset{6}{c} \\ +2\overset{15}{cc} \\ +2\overset{24}{cc} \\ + \overset{33}{cc} \end{matrix}\right\} z^6 + \ldots$$

$$p^3 = a^3 + 3a^2.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{array}{l} 3a^2.\overset{2}{c} \\ +3a.\overset{11}{cc} \end{array}\right\} z^2 + \left\{\begin{array}{l} 3a^2.\overset{3}{c} \\ +3a.2\overset{12}{cc} \\ +\overset{111}{ccc} \end{array}\right\} z^3 + \left\{\begin{array}{l} 3a^2.\overset{4}{c} \\ +3a.2\overset{13}{cc} \\ +3a.\overset{22}{cc} \\ +3\overset{112}{ccc} \end{array}\right\} z^4 + \left\{\begin{array}{l} 3a^2.\overset{5}{c} \\ +3a.2\overset{14}{cc} \\ +3a.\overset{23}{cc} \\ +3\overset{113}{ccc} \\ +3\overset{122}{ccc} \end{array}\right\} z^5 + \left\{\begin{array}{l} 3a^2.\overset{6}{c} \\ +3a.2\overset{15}{cc} \\ +3a.2\overset{24}{cc} \\ +3a.\overset{33}{cc} \\ +3\overset{114}{ccc} \\ +6\overset{123}{ccc} \end{array}\right\} z^6 + \ldots$$

$$p = a^4 + 4a^3.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{array}{l} 4a^3.\overset{2}{c} \\ +6a^2.\overset{11}{cc} \end{array}\right\} z^2 + \left\{\begin{array}{l} 4a^3.\overset{3}{c} \\ +6a^2.2\overset{12}{cc} \\ +4a.\overset{111}{ccc} \end{array}\right\} z^3 + \left\{\begin{array}{l} 4a^3.\overset{4}{c} \\ +6a^2.2\overset{12}{cc} \\ +6a^2.\overset{22}{cc} \\ +4a.3\overset{112}{ccc} \\ +\overset{1111}{cccc} \end{array}\right\} z^4 + \left\{\begin{array}{l} 4a^3.\overset{5}{c} \\ +6a^2.2\overset{14}{cc} \\ +6a^2.2\overset{23}{cc} \\ +4a.3\overset{113}{ccc} \\ +4a.3\overset{122}{ccc} \\ +4\overset{1112}{cccc} \end{array}\right\} z^5 + \left\{\begin{array}{l} 4a^3.\overset{6}{c} \\ +6a^2.2\overset{15}{cc} \\ +6a^2.2\overset{24}{cc} \\ +6a^2.\overset{33}{cc} \\ +4a.3\overset{114}{ccc} \\ +4a.6\overset{123}{ccc} \\ +4a.\overset{222}{ccc} \\ +4\overset{1113}{cccc} \\ +6\overset{1122}{cccc} \end{array}\right\} z^6 + \ldots$$

Beweis. Dieser ergiebt sich unmittelbar durch die Multiplication, wenn man p quadrirt, cubirt und biquadrirt.

Zusatz. Also ist, wenn man den Exponenten der Potenz von $p = n$ setzt, für die vier ersten Potenzen p^1, p^2, p^3, p^4 überhaupt

$$p^n = a^n + n a^{n-1}.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{array}{l} n a^{n-1}.\overset{1}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\overset{1\,1}{cc} \end{array}\right\} z^2 + \left\{\begin{array}{l} n a^{n-1}.\overset{3}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.2\,\overset{1\,2}{cc} \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.\overset{1\,1\,1}{ccc} \end{array}\right\} z^3 + \left\{\begin{array}{l} n a^{n-1}.\overset{4}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2\,\overset{1\,3}{cc} \\ + \overset{2\,2}{cc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.3\,\overset{1\,1\,2}{ccc} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}.\overset{1\,1\,1\,1}{cccc} \end{array}\right\} z^4$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} n a^{n-1}.\overset{5}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2\,\overset{1\,4}{cc} \\ + 2\,\overset{2\,3}{cc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.\left\{\begin{array}{l} 3\,\overset{1\,1\,3}{ccc} \\ + 3\,\overset{1\,2\,2}{ccc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}.4\,\overset{1\,1\,1\,2}{cccc} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^{n-5}.\overset{1\,1\,1\,1\,1}{ccccc} \end{array}\right\} z^5 + \left\{\begin{array}{l} n a^{n-1}.\overset{6}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2\,\overset{1\,5}{cc} \\ + 2\,\overset{2\,4}{cc} \\ + \overset{3\,3}{cc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.\left\{\begin{array}{l} 3\,\overset{1\,1\,4}{ccc} \\ + 6\,\overset{1\,2\,3}{ccc} \\ + \overset{2\,2\,2}{ccc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}.\left\{\begin{array}{l} 4\,\overset{1\,1\,1\,3}{cccc} \\ + 6\,\overset{1\,1\,2\,2}{cccc} \end{array}\right\} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^{n-5}.5\,\overset{1\,1\,1\,1\,2}{ccccc} \end{array}\right\} z^6 + \ldots,$$

und die Natur dieser Formel ist, wie von selbst klar ist, von folgender Art:

1. Das *erste* Glied ist beständig a^n, jedes andere Glied aber ist ein Product aus zwey Factoren, von denen der eine eine Potenz von z ist, der andere aber eine Summe von Partialproducten ist, deren jedes drey verschiedene Factoren enthält.
2. Der *erste* von diesen Factoren sind die *Binomialcoefficienten*,

$$n, \frac{n.n-1}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \text{ u. s. w. (§. 1.), und zwar so, daſs}$$

der erste Binomialcoefficient zum ersten Partialproduct, der zweyte zum zweyten, der dritte zum dritten gehört, und der letzte ist allemal derjenige, welcher 1 wird.
3. Der *zweyte* von diesen Factoren sind die Potenzen a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3} etc. nämlich zum ersten Binomialcoefficienten gehört a^{n-1}, zum zweyten a^{n-2} u. s. w.
4. Der *dritte* von diesen Factoren enthält bloſs die im Polynomio p gegebenen Coefficienten von z, nämlich $\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c}, \overset{4}{c}$ etc., und zwar in jedem Gliede der Formel nach folgender Regel: im ersten Partialproducte ist derselbe einfach, und die Ordnungszahl desselben ist dem Exponenten derjenigen Potenz von z gleich, zu welchem die Partialproducte gehören, nämlich im $m+1^{\text{ten}}$ Gliede, wo der erste Hauptfactor z^m ist, ist derselbe im ersten Partialproducte jederzeit $\overset{m}{c}$, und im zweyten, dritten, vierten, fünften etc. Partialproducte enthält dieser dritte Factor schon selbst Producte, und zwar so viele, als man bekommt, wenn man die Ordnungszahl m zu 2, 3, 4, 5 Theilen so vielmal *zerfällt*, als es angeht, jedoch so, daſs keine von diesen Zerfällungen mit einer andern *ganz* einerley Theile hat, obgleich in jeder Zerfällung dieselbe Zahl mehrere male vorkommen kann.
5. Die *Zahlziffer*, die zu jeder dieser Zerfällungen oder Producte gehöret, ist diejenige, welche anzeigt, *wie vielmal* sich die Factoren eines jeden Products verwechseln lassen.
6. Da in jedem Gliede die Summe aller Partialproducte der *gesuchte Coefficient* derjenigen Potenz von z ist, die zu diesem Gliede ge-

hört; so läſst sich, nach dem angezeigten Verfahren, in den vier ersten Potenzen von p jeder gesuchte m^{te} Coefficient von z^m unabhängig von den vorhergehenden unmittelbar, mithin *auſser der Reihe* angeben.

Anmerkung 1.

Die Vorschrift, wie die No. 4. erforderliche Zerfällung geschehen kann, und der Permutationssatz, nach welchem die No. 5 geforderte Zahl der möglichen Verwechselungen gefunden wird, sind beyde bereits in der vorhergehenden Abhandlung (Anmerk. 3. bey der vierten Methode, und Zus. 4. No. 3.) angeführt worden, und dürfen daher hier nicht wiederhohlt werden.

Anmerkung 2.

Da die im siebenten Zusatz gegebene allgemeine Formel für p^n in Ansehung der vier ersten Potenzen richtig ist; so entsteht aus ihrer so unmittelbar klaren vollkommensten Regelmässigkeit schon die stärkste Vermuthung, daſs sie für *alle* Potenzen von p überhaupt richtig seyn werde, und daſs sie dieses in der That ist, läſst sich, wie bald gezeigt werden soll, strenge erweisen.

Erklärung 3.

§. 8. Die §. 7. Zus. gegebene Formel für die n^{te} Potenz der vieltheiligen Zahl p als für jeden Exponenten gültig gedacht, heiſst der *polynomische* oder *infinitomische Lehrsatz*, und die für die Potenzen von z gesuchten Coefficienten heiſsen die *Polynomialcoefficienten.*

Zusatz. Also enthält jeder Polynomialcoefficient in den ihm zugehörigen Partialproducten, deren jedes aus drey verschiedenen Factoren besteht, im ersten Factor nach der Reihe die Binomialcoefficienten n, $\frac{n.n-1}{1.2}$ etc. im zweyten Factor nach der Reihe die Potenzen der ersten Zahl a, nämlich a^n, a^{n-1}, a^{n-2} etc. in eben der Ordnung, als im binomischen Lehrsatze, und unterscheidet sich daher von diesem bloſs dadurch, daſs im dritten Factor, statt der im binomischen

Lehrsatze steigenden Potenzen der zweyten Zahl b, nämlich b^1, b^2, b^3 etc. die Ordnungszahl m des m^{ten} Polynomialcoefficienten nach und nach in 2, 3, 4 etc. Theile zerfällt werden mufs, um die Producte zu bekommen, die der dritte Factor enthält, und jedes dieser Producte so vielmal genommen werden mufs, so vielmal sich seine Factoren verwechseln lassen.

Lehrsatz 6.

§. 9. Wenn der Exponent n der polynomischen Zahl eine *positive ganze* Zahl ist; so ist der polynomische Lehrsatz allgemein richtig.

Beweis. Man setze, er gelte für irgend eine n^{te} Potenz von p, und multiplicire p^n durch p, wie folgt:

$$p^n = a^n + n a^{n-1}.\overset{1}{c}z + \left[\begin{array}{l} n\,a^{n-1}.\overset{2}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] z^2 + \left[\begin{array}{l} n\,a^{n-1}.\overset{3}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.2\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] z^3 + \left[\begin{array}{l} n\,a^{n-1}.\overset{4}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\left[\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ + \overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right] \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] z^4$$

$$+ \left[\begin{array}{l} n\,a^{n-1}.\overset{5}{c} \\ + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}.\left[\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ + 2\overset{2}{c}\overset{3}{c} \end{array}\right] \\ + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}.\left[\begin{array}{l} 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ + 3\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right] \\ + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} a^{n-4}.4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ + \frac{n\,n-1.n-2\,n-3.n-4}{1.2.3.4.5} a^{n-5}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right] z^5 + \ldots$$

$$p = a + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \overset{5}{c}z^5 + \ldots$$

$$p^{n+1} = a^{n+1} + \left[\begin{array}{l} n.\,a^n.\,\overset{1}{c} \\ +\,a^n.\,\overset{1}{c} \end{array}\right] z + \left[\begin{array}{l} n.\,a^n.\,\overset{2}{c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-1}.\,\overset{1\,1}{c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,1}{c\,c} \\ +\,a^n.\,\overset{2}{c} \end{array}\right] z^2 + \left[\begin{array}{l} n\,a^n.\,\overset{3}{c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-1}.\,2\,\overset{1\,2}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-2}.\,\overset{1\,1\,1}{c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,2}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\,\overset{1\,1\,1}{c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,2}{c\,c} \\ +\,a^n.\,\overset{3}{c} \end{array}\right] z^3$$

$$+ \left[\begin{array}{l} n.\,a^n.\,\overset{4}{o} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-1}.\left[\begin{array}{r} 2\,\overset{1\,3}{c\,c} \\ +\ \overset{2\,2}{c\,c} \end{array}\right] \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-2}.\,3\,\overset{1\,1\,2}{c\,c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,a^{n-3}.\,\overset{1\,1\,1\,1}{c\,c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,3}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\,2\,\overset{1\,1\,2}{c\,c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-3}.\,\overset{1\,1\,1\,1}{c\,c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{2\,2}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\,\overset{1\,1\,2}{c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,3}{c\,c} \\ +\,a^n.\,\overset{4}{c} \end{array}\right] z^4 + \left[\begin{array}{l} n.\,a^n.\,\overset{5}{c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-1}.\left[\begin{array}{r} 2\,\overset{1\,4}{c\,c} \\ +\,2\,\overset{2\,3}{c\,c} \end{array}\right] \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-2}.\left[\begin{array}{r} 3\,\overset{1\,1\,3}{c\,c\,c} \\ +\,3\,\overset{1\,2\,2}{c\,c\,c} \end{array}\right] \\ +\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,a^{n-3}.\,4\,\overset{1\,1\,1\,2}{c\,c\,c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\,a^{n-4}.\,\overset{1\,1\,1\,1\,1}{c\,c\,c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,4}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\left[\begin{array}{r} 2\,\overset{1\,1\,3}{c\,c\,c} \\ +\ \overset{1\,2\,2}{c\,c\,c} \end{array}\right] \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-3}.\,3\,\overset{1\,1\,1\,2}{c\,c\,c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\,a^{n-4}.\,\overset{1\,1\,1\,1\,1}{c\,c\,c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{2\,3}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\,2\,\overset{1\,2\,2}{c\,c\,c} \\ +\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,a^{n-3}.\,\overset{1\,1\,1\,2}{c\,c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{2\,3}{c\,c} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,a^{n-2}.\,\overset{1\,1\,3}{c\,c\,c} \\ +\,n.\,a^{n-1}.\,\overset{1\,4}{c\,c} \\ +\,a^n.\,\overset{5}{c} \end{array}\right] z^5 + \ldots$$

Da nun $\frac{n.n-1}{1.2} + n = \frac{n+1.n}{1.2}$

$$\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + \frac{n.n-1}{1.2} = \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} = \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} = \frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.5} \text{ u. s. w.}$$

so ist

$$p^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n.\overset{1}{c}z + \left[\begin{array}{l} (n+1)\,a^n.\overset{2}{c} \\ +\frac{n+1.n}{1.2}a^{n-1}.\overset{11}{cc} \end{array}\right]z^2 + \left[\begin{array}{l} (n+1)\,a^n.\overset{3}{c} \\ +\frac{n+1.n}{1.2}a^{n-1}.\overset{12}{cc} \\ +\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}a^{n-2}.\overset{111}{ccc} \end{array}\right]z^3$$

$$+\left[\begin{array}{l} (n+1)\,a^n.\overset{4}{c} \\ +\frac{n+1.n}{1.2}a^{n-1}.\left[\begin{array}{l} 2\overset{13}{cc} \\ +\overset{22}{cc} \end{array}\right] \\ +\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}a^{n-2}.3\overset{112}{ccc} \\ +\frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}a^{n-3}.\overset{1111}{cccc} \end{array}\right]z^4 + \left[\begin{array}{l} (n+1)\,a^n.\overset{5}{c} \\ +\frac{n+1.n}{1.2}a^{n-1}.\left[\begin{array}{l} 2\overset{14}{cc} \\ +2\overset{23}{cc} \end{array}\right] \\ +\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}a^{n-2}.\left[\begin{array}{l} 3\overset{113}{ccc} \\ +3\overset{122}{ccc} \end{array}\right] \\ +\frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}a^{n-3}.4\overset{1112}{cccc} \\ +\frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.5}\overset{11111}{ccccc} \end{array}\right]z^5 + \ldots$$

Ist daher der polynomische Lehrsatz in dem Falle, da n eine positive ganze Zahl ist, für irgend eine Potenz p^n wahr, so ist er es auch für die nächstfolgende. Nun aber ist er für die vier ersten Potenzen wahr (§. 7.), folglich auch für die fünfte, sechste etc. also überhaupt für jede Potenz von p.

Zusatz 1. Wenn man daher die Binomialcoefficienten $n, \frac{n.n-1}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. s. w. nach der Reihe durch $^1\mathfrak{B}, {}^2\mathfrak{B}, {}^3\mathfrak{B}$ u. s. w. ausdrückt, so ist, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

$$p^n = a^n + {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{2}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}a^{n-2}.\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^2 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{3}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}a^{n-2}.2\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^3\mathfrak{B}a^{n-3}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^3 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{4}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}a^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^3\mathfrak{B}a^{n-3}.3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^4\mathfrak{B}a^{n-4}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^4 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{5}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}a^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ +2\overset{2}{c}\overset{3}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^3\mathfrak{B}a^{n-3}.\left\{\begin{array}{l} 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +3\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^4\mathfrak{B}a^{n-4}.4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^5\mathfrak{B}a^{n-5}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^5 + \ldots$$

Zusatz 2. Wenn daher $p = 1 + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \overset{5}{c}z^5 + \ldots$ ist, so ist, da hier $a = 1$ wird,

$$p^n = 1 + {}^1\mathfrak{B}.\overset{1}{c}z + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}.\overset{2}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}.\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^2 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}.\overset{3}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}.2\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^3\mathfrak{B}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^3 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}.\overset{4}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}.\left\{\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^3\mathfrak{B}.3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^4\mathfrak{B}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^4 + \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}.\overset{5}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}.\left\{\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ +2\overset{2}{c}\overset{3}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^3\mathfrak{B}.\left\{\begin{array}{l} 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ +3\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right\} \\ +{}^4\mathfrak{B}.4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\ +{}^5\mathfrak{B}.\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} \end{array}\right\}z^5 + \ldots$$

Zusatz 3. Ist daher $q = \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \overset{5}{c}z^5 + \ldots$; so ist

$$q = \overset{1}{c}z \left(1 + \frac{\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}}z + \frac{\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}}z^2 + \frac{\overset{4}{c}}{\overset{1}{c}}z^3 + \frac{\overset{5}{c}}{\overset{1}{c}}z^4 + \frac{\overset{6}{c}}{\overset{1}{c}}z^5 + \ldots\right)$$

Setzt man also in der Formel Zus. 2. $\frac{\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}}$ statt $\overset{1}{c}$, $\frac{\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}}$ statt $\overset{2}{c}$, $\frac{\overset{4}{c}}{\overset{1}{c}}$ statt $\overset{3}{c}$, $\frac{\overset{5}{c}}{\overset{1}{c}}$ statt $\overset{4}{c}$, $\frac{\overset{6}{c}}{\overset{1}{c}}$ statt $\overset{5}{c}$

u. s. w.; so ist $q^n = \left(\overset{1}{c}\right)^n z^n \left(1 + \frac{\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}}z + \frac{\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}}z^2 + \frac{\overset{4}{c}}{\overset{1}{c}}z^3 + \frac{\overset{5}{c}}{\overset{1}{c}}z^4 + \frac{\overset{6}{c}}{\overset{1}{c}}z^5 + \ldots\right)^n$

folglich
$$q^n = \left(\overset{1}{c}\right)^n z^n \left[1 + {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}}\right]z + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{2}{c}\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \end{array}\right]z^2 + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{4}{c}}{\overset{1}{c}} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot 2\frac{\overset{2}{c}\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \end{array}\right]z^3 + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{5}{c}}{\overset{1}{c}} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot\left[\begin{array}{l} 2\frac{\overset{2}{c}\overset{4}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \\ + \frac{\overset{3}{c}\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \end{array}\right] \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \\ + {}^{4}\mathfrak{B}\cdot\frac{\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}} \end{array}\right]z^4 + \ldots$$

Also

$$q^n = \left(\overset{1}{c}\right)^n z^n + {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-1}\overset{2}{c}z^{n+1} + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-1}\cdot\overset{3}{c} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-2}\cdot\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right]z^{n+2} + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-1}\cdot\overset{4}{c} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-2}\cdot 2\overset{2}{c}\overset{3}{c} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-3}\cdot\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right]z^{n+3} + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-1}\cdot\overset{5}{c} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-2}\cdot\left[\begin{array}{l} 2\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\ + \overset{3}{c}\overset{3}{c} \end{array}\right] \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-3}\cdot 3\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} \\ + {}^{4}\mathfrak{B}\cdot\left(\overset{1}{c}\right)^{n-4}\cdot\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right]z^{n+4} + \ldots$$

Zusatz 4. Wenn daher $q = \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$; so ist

$$q^2 = \overset{11}{cc}z^2 + 2\,\overset{12}{cc}z^3 + \left[\begin{array}{l} 2\,\overset{13}{cc} \\ +\overset{22}{cc} \end{array}\right]z^4 + \left[\begin{array}{l} 2\,\overset{14}{cc} \\ +2\,\overset{23}{cc} \end{array}\right]z^5 + \left[\begin{array}{l} 2\,\overset{15}{cc} \\ +2\,\overset{24}{cc} \\ +\overset{33}{cc} \end{array}\right]z^6 + \ldots$$

$$q^3 = \overset{111}{ccc}z^3 + 3\,\overset{112}{ccc}z^4 + \left[\begin{array}{l} 3\,\overset{113}{ccc} \\ +3\,\overset{122}{ccc} \end{array}\right]z^5 + \left[\begin{array}{l} 3\,\overset{114}{ccc} \\ +3.2\,\overset{123}{ccc} \\ +\overset{222}{ccc} \end{array}\right]z^6 + \ldots$$

$$q^4 = \overset{1111}{cccc}z^4 + 4\,\overset{1112}{cccc}z^5 + \left[\begin{array}{l} 4\,\overset{1113}{cccc} \\ +6\,\overset{1122}{cccc} \end{array}\right]z^6 + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Zusatz 5. Wenn ſ $= z+z^2+z^3+z^4+z^5+\ldots$; so ist

ſ$^n = z^n + {}^1\mathfrak{B}z^{n+1} + ({}^1\mathfrak{B}+{}^2\mathfrak{B})z^{n+2} + ({}^1\mathfrak{B}+2\,{}^2\mathfrak{B}+{}^3\mathfrak{B})z^{n+3} + ({}^1\mathfrak{B}+3\,{}^2\mathfrak{B}+3\,{}^3\mathfrak{B}+{}^4\mathfrak{B})z^{n+4} + \ldots$

Denn hier sind die gegebenen Coefficienten $\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c}, \overset{4}{c}$ etc. $= 1$, folglich alle Producte aus denselben ebenfalls, und es bleiben bloſs die Zahlen der Verwechselungen stehen, welche summirt werden müssen.

Lehrsatz 7.

§. 10. Der polynomische Lehrsatz ist ganz allgemein richtig, was für eine Zahl auch der Exponent n seyn mag.

Beweis. Denn wenn $p = a + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$; so ist, wenn man $q = \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$ setzt, $p = a + q$, folglich

$$p^n = a^n + {}^1\mathfrak{B}\,a^{n-1}q + {}^2\mathfrak{B}\,a^{n-2}q^2 + {}^3\mathfrak{B}\,a^{n-3}q^3 + {}^4\mathfrak{B}\,a^{n-4}q^4 + \ldots \quad (§.\ 1.)$$

Setzt man also statt q, q^2, q^3, q^4 etc. ihre Werthe aus §. 7. Z. 4.; so ist

$$(a+q)^n = a^n + {}^1\mathfrak{B}a^{n-1}.\overset{1}{c}z + \left[\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}\,a^{n-1}.\,\overset{2}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}\,a^{n-2}.\,\overset{11}{cc} \end{array}\right]z^2 + \left[\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}\,a^{n-1}.\,\overset{3}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}\,a^{n-2}.\,2\,\overset{12}{cc} \\ +{}^3\mathfrak{B}\,a^{n-3}.\,\overset{111}{ccc} \end{array}\right]z^3 + \left[\begin{array}{l} {}^1\mathfrak{B}\,a^{n-1}.\,\overset{4}{c} \\ +{}^2\mathfrak{B}\,a^{n-2}.\left[\begin{array}{l} 2\,\overset{13}{cc} \\ +\overset{22}{cc} \end{array}\right] \\ +{}^3\mathfrak{B}\,a^{n-3}.\,3\,\overset{112}{ccc} \\ +{}^4\mathfrak{B}\,a^{n-4}.\,\overset{1111}{cccc} \end{array}\right]z^4 + \ldots$$

Also ist der polynomische Lehrsatz für p^n mit dem binomischen für $(a+q)^n$ ganz einerley. Da nun dieser für jeden Exponenten n richtig ist (§. 4. 5); so gilt dieses auch von jenem.

Zusatz 1. Also sind auch die Zusätze 2, 3, 5 zu §. 9. für jeden Exponenten n richtig.

Zusatz 2. Wenn allgemein $p = a u^e + \overset{1}{c} u^{e+w} + \overset{2}{c} u^{e+2w} + \overset{3}{c} u^{e+3w}$ etc. so ist $p = u^e \left(a + \overset{1}{c} u^w + \overset{2}{c} u^{2w} + \overset{3}{c} u^{3w} + \overset{4}{c} u^{4w} + \ldots\right)$ mithin

$$p^n = u^{ne}\left(a + \overset{1}{c} u^w + \overset{2}{c} u^{2w} + \overset{3}{c} u^{3w} + \overset{4}{c} u^{4w} + \ldots\right)^n.$$

Setzt man also $u^w = z$; so ist $p^n = u^{ne}\left(a + \overset{1}{c} z + \overset{2}{c} z^2 + \overset{3}{c} z^3 + \ldots\right)^n$.

Zusatz 3. Ist überhaupt $p = a+b+c+d+e+f+g+\ldots$; so wird, wenn man $b = \overset{1}{c}$, $c = \overset{2}{c}$, $d = \overset{3}{c}$, $e = \overset{4}{c}$ etc. und $z = 1$ setzt,

$$\begin{array}{llll}
p^n = a^n + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-1} . \overset{1}{c} & + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-1} . \overset{2}{c} & + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-2} . \overset{3}{c} & + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-1} . \overset{4}{c} \\
 & + {}^2\mathfrak{B}\, a^{n-2} . \overset{1}{c}\overset{1}{c} & + {}^2\mathfrak{B}\, a^{n-2} . 2\overset{1}{c}\overset{2}{c} & + {}^2\mathfrak{B}\, a^{n-2} . \left[\begin{array}{l} 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ + \overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array}\right] \\
 & & + {}^3\mathfrak{B}\, a^{n-3} . \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} & + {}^3\mathfrak{B}\, a^{n-3} . 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \\
 & & & + {}^4\mathfrak{B}\, a^{n-4} . \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
= a^n + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-1} . \left(\overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \overset{3}{c} + \overset{4}{c} + \overset{5}{c} + \ldots\right) & \\
\quad + {}^2\mathfrak{B}\, a^{n-2} . \left[\begin{array}{lllll}
\overset{1}{c}\overset{1}{c} & + 2\overset{1}{c}\overset{2}{c} & + 2\overset{1}{c}\overset{3}{c} & + 2\overset{1}{c}\overset{4}{c} & + 2\overset{1}{c}\overset{5}{c} + \ldots \\
 & & + \overset{2}{c}\overset{2}{c} & + 2\overset{2}{c}\overset{3}{c} & + 2\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\
 & & & & + \overset{3}{c}\overset{3}{c}
\end{array}\right] & \\
\quad + {}^3\mathfrak{B}\, a^{n-2} . \left[\begin{array}{lllll}
\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} & + 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} & + 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} & + 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c} & + 3\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{5}{c} + \ldots \\
 & & + 3\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} & + 6\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} & + 6\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\
 & & & + \overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} & + 3\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{3}{c} \\
 & & & & + 3\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c}
\end{array}\right] & \\
\quad + \mathfrak{B}^4\, a^{n-4} . \left[\begin{array}{lllll}
\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c} & + 4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} & + 4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} & + 4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c} & + 4\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{5}{c} + \ldots \\
 & & + 6\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c} & + 12\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c} & + 12\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\
 & & & & + 6\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{3}{c}
\end{array}\right] &
\end{array}$$

u. s. w.

Erklärung 3.

§. 11. Es bedeute — ${}_{m}\overset{r}{C}$ die Summe der einzelnen Producte, welche dadurch entstehen, daſs man die Ordnungszahl r von $\overset{r}{c}$, so vielmal als es angeht, in m Theile, jedoch ohne alle Verwechselung der Theile, zerfällt, und dann die Theilzahlen über c setzt, so daſs z. B.

$${}_{1}\overset{1}{C} = \overset{1}{c},\quad {}_{1}\overset{2}{C} = \overset{2}{c},\quad {}_{1}\overset{3}{C} = \overset{3}{c},\quad {}_{2}\overset{2}{C} = \overset{1}{c}\overset{1}{c},\quad {}_{2}\overset{3}{C} = \overset{1}{c}\overset{2}{c},\quad {}_{2}\overset{4}{C} = \overset{1}{c}\overset{3}{c} + \overset{2}{c}\overset{2}{c} \text{ etc. }\quad {}_{3}\overset{4}{C} = \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c},$$

$${}_{3}\overset{5}{C} = \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c} + \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c} \text{ u. s. w.}$$

Ferner bedeute v die mögliche Versetzungszahl der Factoren in jedem dieser Producte, so daſs v für jede Art von Producten eine besondere Zahl anzeigt.

Zusatz 1. Wenn also $p = a + \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$; so ist

$$p^n = a^n + {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}_{1}\overset{1}{C} z + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}_{1}\overset{2}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}_{2}\overset{2}{C} \end{array}\right] z^2 + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}_{1}\overset{3}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}_{2}\overset{3}{C} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3} v\, {}_{3}\overset{3}{C} \end{array}\right] z^3 + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}_{1}\overset{4}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}_{2}\overset{4}{C} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3} v\, {}_{3}\overset{4}{C} \\ + {}^{4}\mathfrak{B}\, a^{n-4} v\, {}_{4}\overset{4}{C} \end{array}\right] z^4 + \ldots$$

Zusatz 2. Also ist für p^n der gesuchte r^{te} Coefficient von z^r

$$= {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1}\, v\, {}_{1}\overset{r}{C} + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2}\, v\, {}_{2}\overset{r}{C} + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3}\, v\, {}_{3}\overset{r}{C} + {}^{4}\mathfrak{B}\, a^{n-4}\, v\, {}_{4}\overset{r}{C} + \ldots,$$

und das m^{te} Glied des r^{ten} Coefficienten $= {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{n-m}\, v\, {}_{m}\overset{r}{C}$.

Gesetzt z. B. man verlangt das vierte Gied des zehnten Coefficienten; so ist $r = 10$, $m = 4$, folglich ist dasselbe

$$ {}^{4}\mathfrak{B}\, a^{n-4}\, v\, {}^{4}\overset{18}{C} = \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \left[\begin{array}{l} \quad 4\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{7}{c} \\ + 12 \left(\begin{array}{l} \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{6}{c} \\ + \overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{3}{c}\overset{5}{c} \end{array} \right) \\ + \; 6\,\overset{1}{c}\overset{1}{c}\overset{4}{c}\overset{4}{c} \\ + 12\,\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{5}{c} \\ + 24\,\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c}\overset{4}{c} \\ + \; 4\,\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\ + \; 6\,\overset{2}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c}\overset{3}{c} \end{array} \right] a^{n-4}. $$

Zusatz 3. Wenn $q = \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$; so ist, wenn $\overset{1}{c} = a$ gesetzt wird

$$ q^n = a^n z^n + {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}^{1}\overset{2}{C} z^{n+1} + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}^{1}\overset{3}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}^{2}\overset{4}{C} \end{array} \right] z^{n+2} + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}^{1}\overset{4}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}^{2}\overset{5}{C} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3} v\, {}^{3}\overset{6}{C} \end{array} \right] z^{n+3} $$

$$ + \left[\begin{array}{l} {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}^{1}\overset{5}{C} \\ + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}^{2}\overset{6}{C} \\ + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3} v\, {}^{3}\overset{7}{C} \\ + {}^{4}\mathfrak{B}\, a^{n-4} v\, {}^{4}\overset{8}{C} \end{array} \right] z^{n+4} + \ldots $$

Zusatz 4. Wenn also $q = \overset{1}{c}z + \overset{2}{c}z^2 + \overset{3}{c}z^3 + \overset{4}{c}z^4 + \ldots$; so ist für q^n, aufser dem ersten Coefficienten a^n oder $(\overset{1}{c})^n$ von z^n, jeder andere r^{te} von z^{n+r}

$$ = {}^{1}\mathfrak{B}\, a^{n-1} v\, {}^{1}\overset{r+1}{C} + {}^{2}\mathfrak{B}\, a^{n-2} v\, {}^{2}\overset{r+2}{C} + {}^{3}\mathfrak{B}\, a^{n-3} v\, {}^{3}\overset{r+3}{C} + {}^{4}\mathfrak{B}\, a^{n-4} v\, {}^{4}\overset{r+4}{C} + {}^{5}\mathfrak{B}\, a^{n-5} v\, {}^{5}\overset{r+5}{C} + \ldots $$

und das m^{te} Glied des r^{ten} Coefficienten von $z^{n+r} = {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{n-m} v\, {}^{m}\overset{r+m}{C}$.

Zusatz 5. Man setze ${}^{1}K = \overset{1}{c} + \overset{2}{c} + \overset{3}{c} + \overset{4}{c} + \overset{5}{c} + \ldots$

$$ {}^{2}K = \overset{1}{c}\overset{1}{c} + 2\,\overset{1}{c}\overset{2}{c} \begin{array}{l} + 2\,\overset{1}{c}\overset{3}{c} \\ + \;\; \overset{2}{c}\overset{2}{c} \end{array} \begin{array}{l} + 2\,\overset{1}{c}\overset{4}{c} \\ + 2\,\overset{2}{c}\overset{3}{c} \end{array} \begin{array}{l} + 2\,\overset{1}{c}\overset{5}{c} + \ldots \\ + 2\,\overset{2}{c}\overset{4}{c} \\ + \;\; \overset{3}{c}\overset{3}{c} \end{array} $$

$$ {}^3K = \overset{111}{ccc} + 3\overset{112}{ccc} + 3\overset{113}{ccc} + 3\overset{114}{ccc} + 3\overset{115}{ccc} + \dots $$
$$ + 3\overset{122}{ccc} + 6\overset{123}{ccc} + 6\overset{124}{ccc} $$
$$ + \overset{222}{ccc} + 3\overset{133}{ccc} $$
$$ + 3\overset{223}{ccc} $$

$$ {}^4K = \overset{1111}{cccc} + 4\overset{1112}{cccc} + 4\overset{1113}{cccc} + 4\overset{1114}{cccc} + 4\overset{1115}{cccc} + \dots $$
$$ + 6\overset{1122}{cccc} + 12\overset{1123}{cccc} + 12\overset{1124}{cccc} $$
$$ + 6\overset{1133}{cccc} $$

$$ {}^5K = \overset{11111}{ccccc} + 5\overset{11112}{ccccc} + 5\overset{11113}{ccccc} + 5\overset{11114}{ccccc} + 5\overset{11115}{ccccc} + \dots $$
$$ + 10\overset{11122}{ccccc} + 20\overset{11123}{ccccc} + 20\overset{11124}{ccccc} $$
$$ + 10\overset{11222}{ccccc} $$

u. s. w.

so ist, wenn $p = a + b + c + d + e + f + g$ etc. ist, und $b = \overset{1}{c}$, $c = \overset{2}{c}$, $d = \overset{3}{c}$, $e = \overset{4}{c}$, $f = \overset{5}{c}$ etc. gesetzt wird,

$$ p^n = a^n + {}^1\mathfrak{B}\, a^{n-1}\, {}^1K + {}^2\mathfrak{B}\, a^{n-2}\, {}^2K + {}^3\mathfrak{B}\, a^{n-3}\, {}^3K + {}^4\mathfrak{B}\, a^{n-4}\, {}^4K + \dots \quad (\S.\ 10.\ Z.\ 3), $$

also aufser dem ersten Gliede a^n, jedes $r^{te} = {}^{r-1}\mathfrak{B}\, a^{n-(r-1)}\, {}^{r-1}K$, und

$$ {}^1K = v\,{}^1\overset{1}{C} + v\,{}^1\overset{2}{C} + v\,{}^1\overset{3}{C} + v\,{}^1\overset{4}{C} + v\,{}^1\overset{5}{C} + \dots $$

$$ {}^2K = v\,{}^2\overset{2}{C} + v\,{}^2\overset{3}{C} + v\,{}^2\overset{4}{C} + v\,{}^2\overset{5}{C} + v\,{}^2\overset{6}{C} + \dots $$

$$ {}^3K = v\,{}^3\overset{3}{C} + v\,{}^3\overset{4}{C} + v\,{}^3\overset{5}{C} + v\,{}^3\overset{6}{C} + v\,{}^3\overset{7}{C} + \dots $$

etc. etc. etc.

und überhaupt $ {}^mK = v\,{}^m\overset{m}{C} + v\,{}^m\overset{m+1}{C} + v\,{}^m\overset{m+2}{C} + v\,{}^m\overset{m+3}{C} + \dots $

Anmerkung.

Hieraus erhellt also, wie sich sowohl jeder Coefficient, als auch jedes Glied desselben durch eine ganz leichte und einfache Gleichung ausdrücken läfst. Die Bezeichnungsart, deren ich mich hiebey bedient, habe ich blofs deshalb gewählt, weil sie mir die bequemste und einfachste zu seyn schien. Hr. Hindenburg hat zum Behuf seiner combinatorischen Analytik eine andere gewählt, die in Rücksicht ih-

Bayerische Staatsbibliothek München

res allgemeinern Zwecks ebenfalls sehr passend ist, und in jener Wissenschaft bereits das Bürgerrecht gewonnen hat. Indessen wird es jedem, der mit letzterer bekannt ist, sehr leicht seyn, meine Bezeichnungsart in die Hindenburgsche umzuwandeln.

Übrigens ist von selbst klar, dafs der ganze Vortrag des binomischen und polynomischen Lehrsatzes nach dieser synthetischen Methode dem Anfänger schon in der Elementar-Arithmetik mitgetheilt werden kann, so bald er nur die allgemeine Addition, Subtraction, Multiplication und Division in Buchstaben inne hat.

IV.

Allgemeine

Theorie der Kettenbrüche.

Erster Abschnitt.

Von den Kettenbrüchen überhaupt.

Erklärung 1.

§. 1.

Ein *zusammenhängender Bruch*, oder *Kettenbruch*, heiſst eine Reihe Brüche, deren jeder mit dem Nenner des nächstvorhergehenden durch Addition verbunden ist, ihre Zähler und Nenner mögen Zahlen seyn, welche sie wollen. Die einzelnen Brüche, aus denen er zusammengesetzt ist, heiſsen seine *Glieder*, und die Zahl, welche anzeigt, das wievielste Glied ein gewisses ist, heiſst die *Ordnungszahl* des Gliedes. Ist diese eine gerade Zahl; so heiſst es ein *gerades*, ist sie aber eine ungerade; so heiſst es ein *ungerades* Glied.

Z. B. der Bruch $\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+\cfrac{g}{h+\cfrac{i}{k}}}}}$

ist ein zusammenhängender Bruch, der aus den fünf Gliedern $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, $\frac{i}{k}$ besteht, von denen $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{i}{k}$ die ungeraden, und $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$ die geraden sind.

Zusatz. Wenn man daher bey einem Gliede nach dem andern stehen bleibt; so läſst sich jeder Kettenbruch in so viele Brüche auflösen, als er Glieder hat. Z. B. Der angeführte läſst sich in folgende fünf Brüche auflösen:

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d+\frac{e}{f}},\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d+\frac{e}{f+\frac{g}{h}}},\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d+\frac{e}{f+\frac{g}{h+\frac{i}{k}}}}.$$

Erklärung 2.

§. 2. Die Brüche, in welche sich ein Kettenbruch nach und nach auflösen läſst, heiſsen, wenn man ihren Werth durch einen einzelnen Bruch, z. B. $\frac{\alpha}{\beta}$ ausdrückt, seine *Theilbrüche*, oder *Partialbrüche.* Die Zahl, welche anzeigt, der wievielste Theilbruch ein gewisser ist, heiſst seine *Ordnungszahl.* Ist diese eine gerade; so heiſst er ein *gerader*, ist sie aber ungerade, ein *ungerader* Theilbruch.

Zusatz 1. Also hat jeder Kettenbruch so viele Theilbrüche, als er Glieder hat, und auſser dem ersten Theilbruche, der aus dem ersten Gliede besteht, entstehen alle übrigen aus Kettenbrüchen, der letzte aber ist dem ganzen Kettenbruch gleich (§. 1. Zus.).

Zusatz 2. Jeder Theilbruch hat mit dem letzten von den ihm zugehörigen Gliedern einerley Ordnungszahl, (§. 1. Z.) z. B. wenn der Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}$ ist; so ist er der dritte, und das letzte Glied $\frac{e}{f}$ ist gleichfalls das dritte.

Zusatz 3. Aus jedem n^{ten} Theilbruch entsteht der nächstfolgende $(n+1)^{te}$, wenn man, statt des Nenners im n^{ten} Gliede die Summe aus diesem Nenner und dem nächstfolgenden $(n+1)^{ten}$ Gliede setzt. Z. B. Aus dem zweyten Theilbruch $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d}}$ entsteht der dritte $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$, wenn man, statt des Nenners d, im zweyten Gliede den Nenner $d+\dfrac{e}{f}$ setzt.

Zusatz 4. Der zweyte Theilbruch $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d}}$ ist $\dfrac{ad}{bd+c}$. Setzt man daher den 0^{ten} Theilbruch $\frac{0}{1}$; so ist der zweyte Theilbruch $\dfrac{ad+0.c}{bd+1.c}$. Eben so ist der dritte Theilbruch

$$\frac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}} = \frac{a}{b+\dfrac{cf}{df+e}} = \frac{adf+ae}{bdf+be+cf} = \frac{adf+ae}{(bd+c)f+be}$$

Lehrsatz 1.

§. 3. In jedem n^{ten} Theilbruche ist der Zähler die Summe der Producte, die man erhält, wenn man den Zähler des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs durch den Nenner des n^{ten} Gliedes, und den Zähler des $(n-2)^{ten}$ Theilbruchs durch den Zähler des n^{ten} Gliedes multiplicirt, sein Nenner hingegen ist die Summe der Producte, die man bekommt, wenn man den Nenner des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs durch den Nenner des n^{ten} Gliedes, und den Nenner des $(n-2)^{ten}$ Theilbruchs durch den Zähler des n^{ten} Gliedes multiplicirt.

Beweis. Denn es sey der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\dfrac{\alpha}{\beta}$, der $(n-1)^{te}$ $\dfrac{\gamma}{\delta}$, und das n^{te} Glied des Kettenbruchs $\dfrac{p}{q}$; so ist, wofern der Satz

wahr ist, der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p}$. Es sey also das $(n+1)^{te}$ Glied $\frac{u}{v}$; so bekommt man den $(n+1)^{ten}$ Theilbruch, wenn man, statt des Nenners q, im n^{ten} Gliede den Nenner $q+\frac{u}{v}$ setzt (§. 2. Z. 3.), also ist der $(n+1)^{te}$ Theilbruch

$$\frac{\gamma(q+\frac{u}{v})+\alpha p}{\delta(q+\frac{u}{v})+\beta p}=\frac{\gamma qv+\gamma u+\alpha pv}{\delta qv+\delta u+\beta pv}=\frac{(\gamma q+\alpha p)v+\gamma u}{(\delta q+\beta p)v+\delta u}.$$

Ist daher der Satz vom n^{ten} Theilbruch wahr; so ist er es auch vom $(n+1)^{ten}$. Nun aber ist er, wenn man den 0^{ten} Theilbruch $\frac{0}{1}$ setzt, vom zweyten Theilbruch, ingleichen vom dritten wahr (§. 2. Z. 4.), folglich auch vom vierten, fünften etc. also von jedem überhaupt.

Aufgabe 1.

§. 4. **Aus den gegebenen Gliedern eines Kettenbruchs seine Theilbrüche nach der Ordnung zu finden.**

Auflösung. Man setze den 0^{ten} Theilbruch $\frac{0}{1}$, nehme das erste Glied zum ersten Theilbruch an (§. 2. Z. 1), und suche aus dem 0^{ten} und ersten Theilbruch den zweyten, aus dem ersten und zweyten den dritten, aus dem zweyten und dritten den vierten, und so überhaupt aus jeden zwey zuletzt gefundenen den nächstfolgenden auf folgende Art. Nämlich man multiplicire jedesmal den Zähler des zuletzt gefundenen Theilbruchs durch den Nenner des nächstfolgenden Gliedes, und den Zähler des zunächst vorhergefundenen Theilbruchs durch den Zähler des vorhin benannten Gliedes, und addire beyde Producte; so ist ihre Summe der Zähler des nächstfolgenden Theilbruchs. Eben so multiplicire man den Nenner des zuletzt gefundenen Theilbruchs durch den Nenner des nächstfolgenden Gliedes, und den Nenner des zunächst vorher gefundenen Theilbruchs durch den Zähler des eben benannten Gliedes, und addire die beyden Producte; so ist ihre Summe der Nenner des nächstfolgenden Theilbruchs (§. 3.). Am bequemsten verfährt man hiebey nach folgendem Schema.

Gesetzt die gegebenen Glieder sind $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ so findet man die Theilbrüche also:

Glieder.	Theilbrüche.
0	$0:1$
$\frac{a}{b}$	$a:b$
$\frac{c}{d}$	$ad:bd+c$
$\frac{e}{f}$	$adf+ae:bdf+cf+be$
$\frac{g}{h}$	$adfh+aeh+adg:bdfh+cfh+beh+bdg+cg.$

Wären die gegebenen Glieder $\frac{a}{b}$, $\frac{-c}{d}$, $\frac{-e}{f}$, $\frac{-g}{h}$; so findet man folgendermaaſsen die Theilbrüche:

Glieder.	Theilbrüche.
0	$0:1$
$\frac{a}{b}$	$a:b$
$\frac{-c}{d}$	$ad:bd-c$
$\frac{-e}{f}$	$adf-ae:bdf-cf-be$
$\frac{-g}{h}$	$adfh-aeh-adg:bdfh-cfh-beh-bdg+cg.$

Wären die gegebenen Glieder $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{-d}$, $\frac{e}{-f}$, $\frac{g}{-h}$; so findet man die Theilbrüche also:

Glieder.	Theilbrüche.
0	$0:1$
$\frac{a}{b}$	$a:b$
$\frac{c}{-d}$	$-ad:-bd+c$
$\frac{e}{-f}$	$adf+ae:bdf-cf+be$
$\frac{g}{-h}$	$-adfh-ach-adg:-bdfh+cfh-beh-bdg+cg.$

Z. B. Im Kettenbruche $\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$

ist
$$\begin{array}{c|l} 0 & 0:1 \\ \frac{2}{3} & 2:3 \\ \frac{4}{5} & 10:19 \\ \frac{1}{3} & 32:60 \\ \frac{1}{2} & 74:139 \end{array}$$

Also sind hier die Theilbrüche:

$\frac{2}{3}$, $\frac{10}{19}$, $\frac{32}{60}$, $\frac{74}{139}$.

Im Kettenbruche $\cfrac{2}{3-\cfrac{4}{5-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2}}}}$

ist
$$\begin{array}{c|l} 0 & 0:1 \\ \frac{2}{3} & 2:3 \\ -\frac{4}{5} & 10:11 \\ -\frac{1}{3} & 28:30 \\ -\frac{1}{2} & 46:49 \end{array}$$

Also sind hier die Theilbrüche:

$\frac{2}{3}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{28}{30}$, $\frac{46}{49}$.

Im Kettenbruche $\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{-5+\cfrac{1}{-3+\cfrac{1}{-2}}}}$

ist
$$\begin{array}{c|l} 0 & 0:1 \\ \frac{2}{3} & 2:3 \\ \frac{4}{-5} & -10:-11 \\ \frac{1}{-3} & 32:36 \\ \frac{1}{-2} & -74:-83 \end{array}$$

Also sind hier die Theilbrüche:

$\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{-11}$, $\frac{32}{36}$, $\frac{-74}{-83}$.

Also ist der erste Kettenbruch $= \frac{74}{139}$, der zweyte $= \frac{46}{49}$, und der dritte $= \frac{74}{83}$.

Zusatz 1. Wenn daher die Zähler und Nenner in allen Gliedern positiv sind; so sind sie auch in allen Theilbrüchen positiv.

Zusatz 2. Wenn in den beyden ersten Gliedern die Zähler und Nenner positiv sind; so ist der zweyte Theilbruch kleiner, als der erste. Ist hingegen der Zähler des zweyten Gliedes negativ; so ist der zweyte Theilbruch gröſser, als der erste.

Denn im ersten Fall ist der erste Theilbruch $\frac{a}{b} = \frac{abd + ac}{b(bd+c)}$, und der zweyte $\frac{ad}{bd+c} = \frac{abd}{b(bd+c)}$, also der zweyte kleiner als der erste. Im zweyten Fall hingegen ist der erste Theilbruch $\frac{a}{b} = \frac{abd - ac}{b(bd-c)}$, und der zweyte $\frac{ad}{bd-c} = \frac{abd}{b(bd-c)}$, also der zweyte gröſser, als der erste.

Zusatz 3. Wenn in den beyden ersten Gliedern die Zähler und Nenner positiv sind; so ist, wenn der Nenner des zweyten Gliedes gröſser als 1 ist, der unveränderte Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche gröſser, als im ersten, und, wenn im ersten Gliede der Zähler kleiner ist, als der Nenner; so ist in den beyden ersten Theilbrüchen allemal der Zähler kleiner, als der Nenner.

Denn der erste Theilbruch ist $\frac{a}{b}$, der zweyte $\frac{ad}{bd+c}$. Ist daher $d > 1$; so ist $ad > a$, und $bd + c > b$. Ist zweytens $a < b$; so ist um so mehr $a < b + \frac{c}{d}$, also $ad < bd + c$.

Zusatz 4. Wenn in den beyden ersten Gliedern die Zähler und Nenner positiv sind; so ist, wenn im ersten Gliede der Zähler kleiner als der Nenner, und im zweyten der Nenner wenigstens $= 1$ ist, die Differenz zwischen dem unveränderten Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche gröſser, als im ersten.

Denn der erste Theilbruch ist $\frac{a}{b}$, der zweyte $\frac{ad}{bd+c}$. Nun ist $bd + c - ad = (b-a)d + c$. Ist daher $a < b$; so ist $b - a$ positiv, folglich wenn d wenigstens $= 1$ ist, $bd + c - ad > b - a$.

Zusatz 5. Wenn im zweyten Gliede der Zähler negativ ist; so sind, wenn im ersten Gliede der Nenner wenigstens $= 1$, und im zweyten der Zähler kleiner als der Nenner ist, die Zähler und Nenner in den beyden ersten Theilbrüchen positiv, und wenn im ersten Gliede der Nenner wenigstens $= 1$, und im zweyten der Zähler um mehr als 1 kleiner, als der Nenner ist; so ist der unveränderte Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche grösser, als im ersten.

Denn im ersten Theilbruch $\frac{a}{b}$ sind Zähler und Nenner positiv.

Nun ist hier der zweyte $\frac{ad}{bd-c}$, folglich wenn b wenigstens $= 1$, und $c < d$ ist, $c < bd$, also sind auch im zweyten der Zähler und Nenner positiv. Ist *zweytens* b wenigstens $= 1$, und c um mehr als 1 kleiner, als d; so ist $d - 1 > c$, folglich $d > 1$, mithin $ad > a$, und $(d-1)b > c$, folglich $bd - c > b$, also die Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche grösser, als im ersten.

Zusatz 6. Wenn im zweyten Gliede der Zähler negativ ist; so sind, wenn im ersten Gliede der Zähler wenigstens um 1, und im zweyten überhaupt kleiner, als der Nenner ist, die Zähler in den beyden ersten Theilbrüchen kleiner, als die Nenner.

Denn der erste Theilbruch ist $\frac{a}{b}$, der zweyte $\frac{ad}{bd-c}$. Ist daher wenigstens $a = b - 1$, und $c < d$; so ist $\frac{c}{d} < 1$, folglich $b - 1 < b - \frac{c}{d}$, mithin $a < b - \frac{c}{d}$, also $ad < bd - c$.

Zusatz 7. Wenn im zweyten Gliede der Zähler negativ ist; so ist, wenn im ersten Gliede der Zähler wenigstens um 1, und im zweyten um mehr als 1 kleiner als der Nenner ist, die Differenz zwischen dem unveränderten Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche grösser, als im ersten.

Denn der erste Theilbruch ist $\frac{a}{b}$, der zweyte $\frac{ad}{bd-c}$. Da nun a wenigstens um 1 kleiner als b ist; so setze man $b - a = x$; so ist x wenigstens $= 1$, und $a = b - x$, folglich $ad = bd - xd$, mithin $bd - c - ad = xd - c$. Nun kann nicht $xd - c = x$ seyn, denn sonst wäre $(d-1)x = c$, folglich $x = \frac{c}{d-1}$, mithin, da $c < d - 1$ ist (p. hyp.), $x < 1$, und eben dieses folgt auch, wenn $xd - c < x$ wäre. Da nun dieses wider die Annahme ist, so ist $xd - c > x$, also $bd - c - ad > b - a$.

Anmerkung.

Bey dem Gebrauche der gegebenen ganz allgemeinen Regel, die Theilbrüche zu finden, ist wohl zu merken, daſs man jeden gefundenen Theilbruch unverändert so lassen muſs, wie man ihn aus den beyden nächst vorhergehenden uumittelbar gefunden hat, ohne ihn etwa erst durch kleinere Zahlen auszudrücken, oder wenn man negative Zähler und Nenner erhält, sie in positive zu verwandeln, wofern man aus ihm die folgenden Theilbrüche nach der gegebenen Regel erzeugen will, indem von selbst klar ist, daſs sonst ganz andere Werthe für die folgenden Theilbrüche heraus kommen würden. Gesetzt z. B. man wollte im ersten Exempel statt des dritten Theilbruchs 32 : 60 den ihm gleichen Bruch 8 : 15 setzen; so bekäme man statt des letzten wahren Theilbruchs $\frac{74}{139}$, der dem ganzen Kettenbruche gleich ist, den kleinern, mithin unrichtigen $\frac{26}{49}$. Oder gesetzt, man wollte im dritten Exempel den zweyten Theilbruch $-10 : -11$ in 10 : 11 verwandeln; so bekäme man statt des dritten wahren $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$, den falschen $\frac{28}{30} = \frac{14}{15}$. Eben so ist aus der gegebenen Regel klar, daſs man auch die gegebenen Glieder unverändert lassen, und sie nicht etwa durch kleinere Zahlen ausdrücken muſs, weil sonst ein Kettenbruch von ganz verschiedenem Werthe entstehen würde.

Gesetzt z. B. es wäre der gegebene Kettenbruch

$$\cfrac{2}{3+\cfrac{8}{10+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}};$$

so ist

0	0 : 1
$\frac{2}{3}$	2 : 3
$\frac{8}{10}$	20 : 38
$\frac{1}{3}$	62 : 117
$\frac{1}{2}$	144 : 272

also ist derselbe $= \frac{144}{272} = \frac{9}{17}$. Setzt man hingegen statt des zweyten Gliedes $\frac{8}{10}$ das ihm gleiche $\frac{4}{5}$; so ist, wie das erste obige Exempel lehrte der Kettenbruch

$$\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{74}{139},$$

also von ganz anderm Werthe, als der vorige. Endlich ist schon aus dem obigen zweyten und dritten Exempel einleuchtend, daſs es bey einem Kettenbruche nicht gleichviel ist, ob man bey negativen Gliedern den Zähler, oder den Nenner negativ setzt, indem für ihn in dem einen Fall ein ganz anderer Werth entsteht, als in dem andern.

Lehrsatz 2.

§. 5. In jedem Kettenbruch enthält die Differenz der Producte aus dem Zähler des n^{ten} Theilbruchs in den Nenner des $(n-1)^{ten}$, und dem Zähler des $(n-1)^{ten}$ in den Nenner des n^{ten}, die Differenz der Producte aus dem Zähler des $(n-1)^{ten}$ in den Nenner des $(n-2)^{ten}$, und dem Zähler des $(n-2)^{ten}$ in den Nenner des $(n-1)^{ten}$ so vielmal, als der Zähler des n^{ten} Gliedes beträgt.

Beweis. Denn es sey der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$, der $(n-1)^{te}\frac{\gamma}{\delta}$, der n^{te} $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, und das n^{te} Glied $\frac{p}{q}$; so ist $\varepsilon = \gamma q + \alpha p$, und $\zeta = \delta q + \beta p$ (§. 3.), folglich $\varepsilon\delta = \gamma q \delta + \alpha \delta p$, und $\gamma\zeta = \gamma q \delta + \gamma \beta p$, also $\varepsilon\delta - \gamma\zeta = (\alpha\delta - \gamma\beta)p$.

Zusatz 1. Wenn man daher von zwey nächsten Theilbrüchen $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ den Zähler eines jeden durch den Nenner des andern multiplicirt; so ist die Differenz der Producte $\alpha\delta$, $\gamma\beta$ dem Producte aus allen Zählern derjenigen Glieder gleich, aus welchen der letzte der beyden Theilbrüche $\frac{\gamma}{\delta}$ entstanden ist, und sie ist positiv, wenn die Zähler der gedachten Glieder entweder alle positiv, oder in gerader Zahl negativ sind, hingegen negativ, wenn sie in ungerader Anzahl negativ sind.

Denn es seyn die Glieder des Kettenbruchs $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$ u. s. w.; so ist der erste Theilbruch $\frac{a}{b}$, und der zweyte $\frac{ad}{bd+c}$ (§. 4.), folglich ist die angezeigte Differenz der Producte für den ersten und zweyten Theilbruch $=abd+ac-abd=ac$, mithin ist sie für den zweyten und dritten Theilbruch $=ace$, folglich für den dritten und vierten $=aceg$ u. s. w. (Lehrs. 2.), also ist überhaupt, wenn der Zähler des n^{ten} Gliedes p ist, für den $(n-1)^{ten}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$ und den n^{ten} $\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=aceg\ldots.p$, oder $\beta\gamma-\alpha\delta=aceg\ldots.p$. und dieses Product ist positiv, wenn die Factoren entweder insgesamt positiv sind, oder wenn die Anzahl der negativen gerade ist, hingegen negativ, wenn letztere ungerade ist.

Zusatz 2. Die Differenz zweyer nächsten Theilbrüche $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ ist ein Bruch, dessen Nenner das Product ihrer beyden Nenner, und dessen Zähler das Product aus den Zählern aller derjenigen Glieder ist, aus welchen der letztere $\frac{\gamma}{\delta}$ erzeugt worden.

Denn $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\beta\delta} = \frac{aceg\ldots p}{\beta\delta}$ (Z. 1.), und eben so ist $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma\beta - \alpha\beta}{\beta\delta} = \frac{aceg\ldots p}{\beta\delta}$ (Z. 1.).

Zusatz 3. Wenn in einem Kettenbruch die Zähler und Nenner der Glieder insgesammt ganze Zahlen sind; so kann, wenn der Zähler und Nenner eines Theilbruchs $\frac{\gamma}{\delta}$ nicht Primzahlen unter sich sind, ihr gröſsester gemeinschaftlicher Theiler nie gröſser seyn, als das Product $aceg\ldots p$ aus den Zählern aller derjenigen Glieder, aus welchen der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ entstanden ist.

Denn man setze, die ganzen Zahlen γ, δ wären noch durch eine gröſsere Zahl m theilbar; so wären, wenn der nächst vorhergehende Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, auch die Producte $\alpha\delta$, $\gamma\beta$ durch m theilbar, also wäre auch ihre Differenz durch m theilbar. Diese aber ist $= aceg\ldots p$ (Z. 1.). Also wäre das Product $aceg\ldots p$ durch eine Zahl theilbar, die gröſser ist, als es selbst, welches unmöglich ist.

Zusatz 4. Also können in einem Theilbruch, der durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, der Zähler und Nenner niemals kleiner seyn, als die Quotienten, die man erhält, wenn man den gefundenen unveränderten Zähler und Nenner des Theilbruchs durch das Product $aceg\ldots p$ aus den Zählern aller derjenigen Glieder, aus welchen der Theilbruch entstanden ist, dividirt.

Denn sonst müſsten beyde noch einen gröſsern gemeinschaftlichen Theiler haben, als $aceg\ldots p$. Dieses aber ist unmöglich (Z. 3.).

Lehrsatz 3.

§. 6. Wenn ein Bruch $\frac{x}{y}$ kleiner ist, als der gröſsere von zwey nächsten aus ganzen Zahlen bestehenden Theilbrüchen, z. B.

dem $(n-1)^{ten}\ \frac{\alpha}{\beta}$, und dem $n^{ten}\ \frac{\gamma}{\delta}$, und gröſser, als der kleinere von ihnen; so ist sein Zähler und Nenner gröſser, als die Quotienten, die man erhält, wenn man den Zähler und Nenner eines der beyden Theilbrüche durch das Product $aceg \ldots p = m$ aus den Zählern der ersten n Glieder dividirt, vorausgesetzt, daſs dasselbe eine ganze Zahl ist, d. i. wenn man z. B. $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ setzt, und $\frac{x}{y} < \frac{\alpha}{\beta}$, aber $\frac{x}{y} > \frac{\gamma}{\delta}$ ist; so ist $x > \frac{\alpha}{m}$, auch $x > \frac{\gamma}{m}$, und $y > \frac{\beta}{m}$, auch $y > \frac{\delta}{m}$.

Beweis. Denn da $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{m}{\beta\delta}$ (§. 5. Z. 2), und $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta} - \frac{x}{y}$; so ist $\frac{m}{\beta\delta} > \frac{\alpha y - \beta x}{\beta y}$, folglich $\frac{my}{\delta} > \alpha y - \beta x$. Da nun $\frac{x}{y} < \frac{\alpha}{\beta}$ (p. hyp.); so ist $\beta x < \alpha y$, folglich $\alpha y - \beta x$ eine ganze Zahl, mithin $my > \delta$, also erstlich $y > \frac{\delta}{m}$.

Nun ist auch $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} > \frac{x}{y} - \frac{\gamma}{\delta}$, folglich $\frac{m}{\beta\delta} > \frac{\delta x - \gamma y}{\delta y}$, mithin $\frac{my}{\beta} > \delta x - \gamma y$. Da nun $\frac{x}{y} > \frac{\gamma}{\delta}$ (p. hyp.); so ist $\delta x > \gamma y$, folglich $\delta x - \gamma y$ eine ganze Zahl; mithin $my > \beta$, also *zweytens* $y > \frac{\beta}{m}$.

Ferner ist $\frac{\delta}{\gamma} > \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{y}{x}$, und $\frac{\delta}{\gamma} > \frac{y}{x}$.

Da nun $\alpha\delta - \gamma\beta = m$ (§. 5. Z. 1.); so ist $\frac{\alpha\delta}{\gamma} - \beta = \frac{m}{\gamma}$, $\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{\alpha\gamma}$. Nun ist $\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\delta}{\gamma} - \frac{y}{x}$, folglich $\frac{m}{\alpha\gamma} > \frac{\delta x - \gamma y}{\gamma x}$, mithin $\frac{mx}{\alpha} > \delta x - \gamma y$, folglich $mx > \alpha$, also *drittens* $x > \frac{\alpha}{m}$.

Da endlich $\frac{x}{y} > \frac{\gamma}{\delta}$ (p. hyp.) folglich auch $\frac{x}{y} > \frac{\gamma : m}{\delta : m}$, und $y > \frac{\delta}{m}$ ist (No. 1.); so ist auch viertens $x > \frac{\gamma}{m}$.

Lehrsatz 4.

§. 7. Wenn in zwey nächsten Theilbrüchen, z. B. im $(n-2)^{ten}$ $\frac{\alpha}{\beta}$, und im $(n-1)^{ten}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ und zugleich im n^{ten} Gliede $\frac{p}{q}$ die Zähler und Nenner insgesammt positiv sind; so sind sie auch im n^{ten} Theilbruch $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ positiv, und der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ ist kleiner, oder gröſser, als der nächstfolgende $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, nachdem er kleiner, oder gröſser, als der nächstvorhergehende $\frac{\alpha}{\beta}$ ist. Ist hiebey *zweytens* im n^{ten} Gliede der Nenner q wenigstens $= 1$; so sind die Zähler und Nenner im n^{ten} Theilbruche gröſser, als im $(n-1)^{ten}$. Sind *drittens* in den beyden nächsten Theilbrüchen $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ die Zähler kleiner, als die Nenner; so ist auch im nächstfolgenden $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ der Zähler kleiner als der Nenner, und wenn hiebey noch der Nenner q des n^{ten} Gliedes wenigstens $= 1$ ist; so ist *viertens* die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner im n^{ten} Theilbruche gröſser, als im $(n-1)^{ten}$.

Beweis. Denn da $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma q + \alpha p}{\delta q + \beta p}$ ist (§. 3.); so ist sowohl ε, als ζ positiv, und $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma \delta q + \alpha \delta p}{\delta(\delta q + \beta p)}$, und $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma \delta q + \gamma \beta p}{\delta(\delta q + \beta p)}$.

Nun ist, wenn $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$ ist, $\gamma\beta < \alpha\delta$, und wenn $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$ ist, $\gamma\beta > \alpha\delta$. Also ist, wenn $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$ ist, auch $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$, und wenn $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$ ist, auch $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Ist *zweytens* q wenigstens $= 1$; so ist $\gamma q + \alpha p > \gamma$, und $\delta q + \beta p > \delta$, also $\varepsilon > \gamma$, und $\zeta > \delta$.

Ist *drittens* $\alpha < \beta$, und $\gamma < \delta$; so ist $\gamma q + \alpha p < \delta q + \beta p$, also auch $\varepsilon < \zeta$.

Ist hiebey *viertens* auch q wenigstens $= 1$; so ist, da $\delta - \gamma$, und $\beta - \alpha$ positiv sind, $(\delta - \gamma)\, q + (\beta - \alpha)\, p > \delta - \gamma$, folglich $\delta q + \beta p - (\gamma q + \alpha p) > \delta - \gamma$, also $\zeta - \varepsilon > \delta - \gamma$.

Zusatz 1. Wenn daher die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind; so sind sie auch in allen Theilbrüchen positiv, und jeder gerade Theilbruch ist kleiner, jeder ungerade hingegen gröſser, als der nächst vorhergehende, und nächstfolgende.

Denn da hier in den beyden ersten Theilbrüchen die Zähler und Nenner positiv sind (§. 4. Z. 1.), so sind sie es auch im dritten, folglich auch im vierten, und so in allen überhaupt (Lehrs. 4.). Da nun ferner der zweyte Theilbruch kleiner ist, als der erste (§. 4. Z. 2.); so ist er auch kleiner, als der dritte, folglich der erste und dritte gröſser, als der zweyte, mithin ist der dritte auch gröſser, als der vierte, folglich der vierte kleiner, als der dritte und fünfte, und so überhaupt jeder gerade Theilbruch kleiner, jeder ungerade hingegen gröſser, als der nächstvorhergehende und nächstfolgende (Lehrs. 4.).

Zusatz 2. Wenn die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind, und hiebey im zweyten Gliede der Nenner gröſser als 1, in den folgenden aber wenigstens $= 1$ ist; so nehmen die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer zu.

Denn wenn der Nenner des zweyten Gliedes gröſser als 1 ist; so ist der Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche gröſser, als im ersten (§. 4. Z. 3.). Da nun in den folgenden Gliedern der Nenner

wenigstens = 1 ist (p. hyp.); so ist auch der Zähler und Nenner im dritten Theilbruche gröſser, als im zweyten, im vierten gröſser, als im dritten, und so nehmen sie beständig zu (Lehrs. 4. No. 2.).

Zusatz 3. Wenn die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind, und im ersten Gliede der Zähler kleiner als der Nenner ist; so ist in jedem Theilbruche der Zähler kleiner, als der Nenner.

Denn da dieses von den beyden ersten Theilbrüchen gilt (§. 4. Z 3.); so gilt es auch vom dritten, vierten, und allen überhaupt (Lehrs. 4. No. 3.).

Zusatz 4. Wenn die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind, und im ersten Gliede der Zähler kleiner, als der Nenner, in allen folgenden aber der Nenner wenigstens = 1 ist; so nehmen die Nenner der Theilbrüche stärker zu, als ihre Zähler.

Denn hier ist die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner nicht nur im zweyten Theilbruche gröſser als im ersten (§. 4. Z. 4.), sondern auch in jedem folgenden gröſser, als im nächstvorhergehenden (Lehrs. 4. No. 4.)

Zusatz 5. Wenn in einem Kettenbruch bloſs der Zähler des zweyten Gliedes negativ ist; so sind, wenn der Nenner des ersten Gliedes wenigstens = 1, und im zweyten der Zähler kleiner als der Nenner ist, die Zähler und Nenner aller Theilbrüche positiv, und jeder ungerade Theilbruch ist kleiner, jeder gerade hingegen gröſser, als der nächstvorhergehende und nächstfolgende.

Denn da hier die Zähler und Nenner in den beyden ersten Theilbrüchen positiv sind (§. 4. Z. 5.); so sind sie auch in allen folgenden positiv (Lehrs. 4. No. 1.), und da ferner der zweyte Theilbruch gröſser, als der erste ist (§. 4. Z. 2.); so ist er auch gröſser als der dritte, folglich der erste und dritte kleiner als der zweyte, folglich der dritte auch kleiner als der vierte, mithin der vierte gröſser, als der dritte und fünfte. und so überhaupt jeder ungerade kleiner, jeder gerade hingegen gröſser, als der nächstvorhergehende und nächstfolgende (Lehrs. 4. No. 1.).

Zusatz 6 Wenn in einem Kettenbruch bloſs der Zähler des zweyten Gliedes negativ ist; so nehmen, wenn im zweyten Gliede der Zähler um mehr als 1 kleiner als der Nenner, und in allen übri-

gen Gliedern der Nenner wenigstens $= 1$ ist, die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer zu.

Denn der Zähler und Nenner ist im zweyten Theilbruche gröfser, als im ersten (§. 4. Z. 5.). Nun sind sie auch in den beyden ersten Theilbrüchen positiv (§. 4. Z. 5.) folglich sind sie in dem der übrigen gleichfalls gröfser, als im nächstvorhergehenden (Lehrs. 4. No. 2.). Also nehmen sie beständig zu.

Zusatz 7. Wenn in einem Kettenbruch blofs der Zähler des zweyten Gliedes negativ ist; so ist, wenn im ersten Gliede der Nenner wenigstens $= 1$, und der Zähler wenigstens um 1, im zweyten Gliede aber überhaupt kleiner als der Nenner ist, in jedem Theilbruche der Zähler kleiner, als der Nenner.

Denn da hier die Zähler und Nenner in den beyden ersten Theilbrüchen positiv (§. 4. Z. 5.), und in beyden der Zähler kleiner als der Nenner ist (§. 4. Z. 6.); so ist er es auch im dritten, vierten, und in allen übrigen (Lehrs. 4. No. 3.).

Zusatz 8. Wenn in einem Kettenbruch blofs der Zähler des zweyten Gliedes negativ ist; so nehmen, wenn im ersten Gliede der Zähler wenigstens um 1, und im zweyten um mehr als 1 kleiner als der Nenner, in allen aber der Nenner wenigstens $= 1$ ist, die Nenner der Theilbrüche stärker zu, als ihre Zähler.

Denn im zweyten Theilbruche ist hier die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner gröfser, als im ersten (§. 4. Z. 7.).

Da nun ferner in den beyden ersten Theilbrüchen die Zähler und Nenner positiv (§. 4. Z. 5.), und der Zähler kleiner, als der Nenner ist (§. 4. Z. 6.); so ist die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner auch im dritten gröfser, als im zweyten, im vierten gröfser als im dritten u. s. w. (Lehrs. 4. No. 4.). Also nehmen die Nenner der Theilbrüche stärker zu, als ihre Zähler.

Lehrsatz 5.

§. 8. Jeder n^{te} Theilbruch ist gröfser, oder kleiner, als der $(n-2)^{te}$, nachdem der $(n-1)^{te}$ gröfser oder kleiner als der $(n-2)^{te}$ ist, vorausgesetzt, dafs der $(n-2)^{te}$ und $(n-1)^{te}$ beyde positiv, und der Zähler und Nenner im n^{ten} Gliede gleichfalls positiv sind.

Beweis. Denn es sey der $(n-2)^{te}$ $\frac{\alpha}{\beta}$, der $(n-1)^{te}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ und das n^{te} Glied $\frac{p}{q}$; so ist der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p}$ (§. 3.). Ist nun $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\gamma\beta > \alpha\delta$, folglich $\frac{\gamma\beta q}{p} > \frac{\alpha\delta q}{p}$, mithin $\frac{\gamma\beta q}{p} + \alpha\beta > \frac{\alpha\delta q}{p} + \alpha\beta$, folglich $(\gamma q+\alpha p)\beta > (\delta q+\beta p)\alpha$, also $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p} > \frac{\alpha}{\beta}$.

Ist hingegen $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$; so ist auf eben diese Art klar, daſs in diesem Falle $(\gamma q+\alpha p)\beta < (\delta q+\beta p)\alpha$, also $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p} < \frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Zusatz 1. Wenn daher in einem Kettenbruch die Zähler und Nenner der Glieder alle positiv sind; so werden die ungeraden Theilbrüche immer kleiner, die geraden hingegen immer gröſser.

Denn da hier alles positiv, der zweyte Theilbruch kleiner als der erste, der vierte kleiner als der dritte, der sechste kleiner als der fünfte etc. ist (§. 7. Z. 1.); so ist auch der dritte kleiner als der erste, der fünfte kleiner als der dritte, der siebente kleiner als der fünfte etc. (Lehrs. 5.), also werden die ungeraden Theilbrüche immer kleiner. Da hingegen der dritte gröſser, als der zweyte, der fünfte gröſser als der vierte, der siebente gröſser als der sechste etc. ist (§. 7. Z. 1.); so ist auch der vierte gröſser als der zweyte, der sechste gröſser als der vierte, der achte gröſser als der sechste etc. (Lehrs. 5.), also werden die geraden Theilbrüche immer gröſser.

Zusatz 2. Wenn in einem Kettenbruch die Zähler und Nenner der Glieder alle positiv sind; so ist der letzte Theilbruch, der ihm gleich ist, kleiner, als jeder vorhergehende ungerade, aber gröſser, als jeder vorhergehende gerade.

Denn ist der letzte Theilbruch ungerade; so ist er kleiner, als jeder vorhergehende ungerade (Z. 1.), und ist er gerade; so ist er kleiner als der vorletzte ungerade (§. 7. Z. 1.), und dieser wieder kleiner als jeder vorhergehende ungerade (Z. 1.), also ist er auch hier,

mithin allgemein, kleiner, als jeder vorhergehende ungerade. Dagegen ist er, wenn er gerade ist, gröſser, als jeder vorhergehende gerade (Z. 1.), und wenn er ungerade ist; so ist er gröſser als der vorletzte gerade (§. 7. Z. 1.), und dieser gröſser als jeder vorhergehende gerade (Z. 1.), also ist er auch hier, mithin allgemein, gröſser, als jeder vorhergehende gerade.

Zusatz 3. Wenn in einem Kettenbruch bloſs der Zähler des zweyten Gliedes negativ, und der Nenner des ersten Gliedes wenigstens = 1, im zweyten aber der Zähler kleiner als der Nenner ist; so werden die ungeraden Theilbrüche immer gröſser, die geraden hingegen immer kleiner.

Denn da hier die Zähler und Nenner aller Theilbrüche positiv, und der zweyte Theilbruch gröſser als der erste, der vierte gröſser als der dritte, der sechste gröſser als der fünfte etc. (§. 7. Z. 5.); so ist auch der dritte gröſser als der erste, der fünfte gröſser als der dritte, der siebente gröſser als der fünfte etc. (Lehrs. 5.), also werden die ungeraden Theilbrüche immer gröſser. Da hingegen der dritte Theilbruch kleiner als der zweyte, der fünfte kleiner als der vierte, der siebente kleiner als der sechste etc. (§. 7. Z. 5.); so ist auch der vierte kleiner als der zweyte, der sechste kleiner als der vierte, der achte kleiner als der sechste etc. (Lehrs. 5.), also werden die geraden Theilbrüche immer kleiner.

Zusatz 4. Wenn in einem Kettenbruch bloſs der Zähler des zweyten Gliedes negativ, und der Nenner des ersten Gliedes wenigstens = 1, im zweyten aber der Zähler kleiner als der Nenner ist; so ist der ihm gleiche letzte Theilbruch gröſser, als jeder vorhergehende ungerade, aber kleiner, als jeder vorhergehende gerade.

Denn ist der letzte Theilbruch ungerade; so ist er gröſser, als jeder vorhergehende ungerade (Z. 3.), und ist er gerade; so ist er gröſser, als der vorletzte ungerade (§. 7. Z. 5.), und dieser ist gröſser, als jeder vorhergehende ungerade (Z. 3.), also ist er wiederum gröſser, als jeder vorhergehende ungerade. Dagegen ist er, wenn er gerade ist, kleiner als jeder vorhergehende gerade (Z. 3.), und wenn er ungerade ist, kleiner als der vorletzte gerade (§. 7. Z. 5.), und dieser wieder kleiner, als jeder vorhergehende gerade (Z. 3.), also ist er wiederum kleiner, als jeder vorhergehende gerade.

Lehrsatz 6.

§. 9. Wenn der letzte Theilbruch $\frac{w}{z}$ größer, oder kleiner, als der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$, aber kleiner, oder größer, als der nächstvorhergehende $\frac{\alpha}{\beta}$ ist; so ist die Differenz zwischen ihm und dem Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ allemal kleiner, als der Bruch $\frac{m}{\beta\delta}$, der das Product m aus den Zählern aller Glieder, aus welchen $\frac{\gamma}{\delta}$ entstanden ist, zum Zähler, und das Product aus den Nennern der Theilbrüche $\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}$ zum Nenner hat.

Beweis. Denn es sey *erstlich* $\frac{w}{z} > \frac{\gamma}{\delta}$, aber $\frac{w}{z} < \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\frac{w}{z} - \frac{\gamma}{\delta} = x$, folglich $\frac{w}{z} = x + \frac{\gamma}{\delta}$. Da nun $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$; so ist $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{m}{\beta\delta}$ (§. 5. Z. 2.), folglich $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\delta}$.

Nun ist $\frac{w}{z} < \frac{\alpha}{\beta}$ (p. hyp.), folglich $x + \frac{\gamma}{\delta} < \frac{m}{\beta\delta} + \frac{\gamma}{\delta}$, also $x < \frac{m}{\beta\delta}$.

Ist *zweytens* $\frac{w}{z} < \frac{\gamma}{\delta}$, aber $\frac{w}{z} > \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{w}{z} = x$, folglich $\frac{\gamma}{\delta} = x + \frac{w}{z}$. Da nun $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{\beta\delta}$ (§. 5. Z. 2), folglich $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{m}{\beta\delta} + \frac{\alpha}{\beta}$, mithin $x + \frac{w}{z} = \frac{m}{\beta\delta} + \frac{\alpha}{\beta}$. Da nun $\frac{w}{z} > \frac{\alpha}{\beta}$ (p. hyp.); so ist $x > \frac{m}{\beta\delta}$.

Zusatz. Wenn daher in einem Kettenbruch entweder die Zähler und Nenner der Glieder alle positiv sind, oder wenn blofs der Zähler des zweyten Gliedes negativ, und im ersten Gliede der Nenner wenigstens $= 1$, im zweyten aber der Zähler kleiner als der Nenner ist; so ist die Differenz zwischen dem letzten Theilbruche und jedem andern $\frac{\gamma}{\delta}$ allemal kleiner als der Bruch $\frac{m}{\beta\delta}$, der das Product aus allen Zählern derjenigen Glieder, aus welchen $\frac{\gamma}{\delta}$ entstanden ist, zum Zähler, und das Product aus dem Nenner des letztern in dem Nenner des nächstvorhergehenden $\frac{\alpha}{\beta}$ zum Nenner hat.

Denn hier ist in beyden Fällen der letzte Theilbruch gröfser oder kleiner, als jeder vorhergehende, nachdem er kleiner, oder gröfser, als der nächstvorhergehende ist (§. 8. Z. 2. 4.).

Lehrsatz 7.

§. 10. Wenn die Zähler und Nenner im $(n-2)^{\text{ten}}$ Theilbruche $\frac{\alpha}{\beta}$, und im $(n-1)^{\text{ten}}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ positiv, und im letztern gröfser, als im ersten sind, der Zähler des n^{ten} Gliedes $-\frac{p}{q}$ aber negativ, und kleiner, als der Nenner ist; so sind auch im n^{ten} Theilbruche $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ der Zähler und Nenner positiv; und wenn im n^{ten} Gliede der Zähler um mehr als 1 kleiner als der Nenner ist, so sind sie im n^{ten} Theilbruche auch gröfser, als im $(n-1)^{\text{ten}}$.

Beweis. Denn da $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma q - \alpha p}{\delta q - \beta p}$ (§. 5.), und $\gamma > \alpha$, $\delta > \beta$, und $q > p$ sind (p. hyp.); so ist $\gamma q > \alpha p$, und $\delta q > \beta p$, also ε, ζ positiv. Ist nun ferner p um mehr als 1 kleiner als q; so ist $q - 1 > p$, folglich $(q-1)\gamma > \alpha p$, und $(q-1)\delta > \beta p$, also $\gamma q - \alpha p > \gamma$, und $\delta q - \beta p > \delta$, $\varepsilon > \gamma$, und $\zeta > \delta$.

Zusatz. Wenn daher in einem Kettenbruch, aufser dem ersten Gliede, die Zähler aller übrigen negativ sind, und der Nenner des ersten Gliedes wenigstens $= 1$ ist; so sind, wenn in den folgenden Gliedern der Zähler kleiner als der Nenner ist, die Zähler und Nenner aller Theilbrüche positiv, und wenn in allen Gliedern, aufser dem ersten, der Zähler um mehr als 1 kleiner als der Nenner ist; so nehmen die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer zu.

Denn da hier erstlich im ersten und zweyten Theilbruche die Zähler und Nenner positiv sind (§. 4. Z. 5.); so sind sie auch im dritten, vierten, und allen überhaupt positiv (Lehrs. 7).

Da *zweytens* der Zähler und Nenner im zweyten Theilbruche gröfser, als im ersten ist (§. 4. Z. 5.); so ist er auch im dritten gröfser, als im zweyten, im vierten gröfser, als im dritten etc. (Lehrs. 7.), also werden sie immer gröfser.

Lehrsatz 8.

§. 11. Wenn im $(n-2)^{\text{ten}}$ Theilbruche $\frac{\alpha}{\beta}$, und im $(n-1)^{\text{ten}}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ die Zähler und Nenner positiv, und jene nicht nur kleiner als diese sind, sondern auch die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner im $(n-1)^{\text{ten}}$ gröfser, als im $(n-2)^{\text{ten}}$ ist; so ist, wenn im n^{ten} Gliede $-\frac{p}{q}$ der Zähler negativ, und kleiner als der Nenner ist, der Zähler des n^{ten} Theilbruchs $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ kleiner als sein Nenner, und wenn im n^{ten} Gliede $-\frac{p}{q}$ der Zähler wenigstens um 1 kleiner als der Nenner ist; so ist auch die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner im n^{ten} Theilbruche gröfser, als im $(n-1)^{\text{ten}}$.

Beweis. Denn da $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma q - \alpha p}{\delta q - \beta p}$ (§. 3.), und $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $\delta - \gamma > \beta - \alpha$ ist (p. hyp.); so ist, wenn $p < q$ ist, $(\delta - \gamma) q > (\beta - \alpha) p$, folglich $\delta q - \beta p > \gamma q - \alpha p$, also $\varepsilon < \zeta$.

Ist zweytens entweder $p = q - 1$, oder $p < q - 1$; so ist entweder $\frac{p}{q-1} = 1$, oder $\frac{p}{q-1} < 1$. Da nun $\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} > 1$ ist, $\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} > \frac{p}{q-1}$, folglich $(\delta - \gamma) q - (\delta - \gamma) > (\beta - \alpha) p$, mithin $(\delta - \gamma) q - (\beta - \alpha) p > \delta - \gamma$, folglich $\delta q - \beta p - (\gamma q - \alpha p) > \delta - \gamma$, also $\zeta - \varepsilon > \delta - \gamma$.

Zusatz. Wenn daher in einem Kettenbruch die Zähler der Glieder, aufser dem ersten, alle negativ sind; so ist, wenn im ersten Gliede der Zähler wenigstens um 1, in allen übrigen aber um mehr als 1 kleiner als der Nenner ist, in jedem Theilbruche der Zähler kleiner, als der Nenner, und die Nenner der Theilbrüche nehmen stärker zu, als ihre Zähler.

Denn hier sind in den beyden ersten Theilbrüchen die Zähler und Nenner positiv (§. 4. Z. 5.), und jene nicht nur kleiner als diese (§. 4. Z. 6.), sondern auch die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner im zweyten gröfser, als im ersten (§. 4. Z. 7.), folglich sind beyde Sätze vom ersten und zweyten Theilbruche wahr, also auch vom dritten, vierten, und allen überhaupt (Lehrs. 8.).

Lehrsatz 9.

§. 12. Wenn im $(n-2)^{ten}$ Theilbruche $\frac{\alpha}{\beta}$, im $(n-1)^{ten}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ und im n^{ten} $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ die Zähler und Nenner insgesammt positiv sind, und im n^{ten} Gliede $-\frac{p}{q}$ der Zähler negativ ist; so ist der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ kleiner, oder gröfser, als der nächstfolgende $\frac{\varepsilon}{\zeta}$, nachdem er gröfser, oder kleiner, als der nächstvorhergehende $\frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Beweis. Denn $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\gamma q - \alpha p}{\delta q - \beta p}$ (§. 3.) $= \frac{\gamma \delta q - \alpha \delta p}{\delta(\delta q - \beta p)}$, und $\frac{\gamma}{\delta}$ $= \frac{\gamma \delta q - \gamma \beta p}{\delta(\delta q - \beta p)}$. Ist daher $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\gamma\beta > \alpha\delta$, also $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$. Ist hingegen $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\alpha}{\beta}$; so ist $\gamma\beta < \alpha\delta$, also $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Zusatz. Wenn daher in einem Kettenbruch die Zähler der Glieder, aufser dem ersten, alle negativ sind; so nehmen, wenn im ersten Gliede der Nenner wenigstens $= 1$, und in den folgenden der Zähler kleiner, als der Nenner ist, die Theilbrüche immer zu, und der letzte ist also gröfser, als jeder vorhergehende.

Denn da hier die Zähler und Nenner aller Theilbrüche positiv sind (§. 10. Z.), und der zweyte Theilbruch gröfser, als der erste ist (§. 4. Z. 2.); so ist er kleiner als der dritte (Lehrs. 9.), folglich der dritte gröfser, als der zweyte, also kleiner als der vierte (Lehrs. 9.), folglich der vierte wiederum gröfser, als der dritte, und so der fünfte gröfser, als der vierte, der sechste gröfser, als der fünfte u. s. w. Also nehmen die Theilbrüche immer zu, mithin ist der letzte der gröfseste von allen.

Lehrsatz 10.

§. 13. Wenn in einem Kettenbruch die Zähler der Glieder, aufser dem ersten, alle negativ sind; so ist, wenn im ersten Gliede der Zähler wenigstens um 1, in allen übrigen aber um mehr als 1 kleiner als der Nenner ist, die Differenz zwischen jedem n^{ten} Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ und dem letzten $\frac{w}{z}$ allemal kleiner, als der Bruch $\frac{m}{\delta(\delta - \beta)}$, der das Product aus den Zählern der ersten n Glieder zum Zähler, und das Product aus dem Nenner des n^{ten} Theilbruchs in die Differenz zwischen ihm, und dem Nenner des $(n-1)^{ten}$ zum Nenner hat.

Beweis. Denn man setze, der Kettenbruch, der vom $(n+1)^{ten}$ Gliede positiv genommen anfängt, und bis zum letzten Gliede fort-

geht, sey $= \frac{u}{v}$; so bekommt man für den ganzen gegebenen Kettenbruch den letzten Theilbruch $\frac{w}{z}$, wenn man zum Nenner des n^{ten} Gliedes $\frac{u}{v}$ addirt, so daſs $\frac{u}{v}$ das $(n+1)^{te}$ Glied, und $\frac{w}{z}$ der $(n+1)^{te}$ Theilbruch wird (§. 2. Z. 3.). Nun aber sind in den Theilbrüchen $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{u}{v}$ nicht nur die Zähler und Nenner positiv, und $\delta > \beta$ (§. 10. Z.), sondern auch $u < v$ (§. 11. Z.). Da aber in allen Gliedern, auſser dem ersten, die Zähler negativ sind (p. hyp.); so muſs auch in $\frac{u}{v}$, welches das $(n+1)^{te}$ Glied vorstellt, der Zähler negativ genommen werden, folglich ist $\frac{w}{z} = \frac{\gamma v - \alpha u}{\delta v - \beta u}$ (§. 3.). Nun ist $\frac{w}{z} > \frac{\gamma}{\delta}$ (§. 12. Z.), folglich $\frac{w}{z} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma v - \alpha u}{\delta v - \beta u} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{(\gamma\beta - \alpha\delta)u}{\delta(\delta v - \beta u)} = \frac{mu}{\delta(\delta v - \beta u)}$ (§. 5. Z. 1.).

Man setze also $v = u + y$; so ist $\delta v = \delta u + \delta y$, folglich $\delta v - \beta u = (\delta - \beta)u + \delta y$, folglich $\frac{w}{z} - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{mu}{\delta(\delta - \beta)u + \delta y}$, also $\frac{w}{z} - \frac{\gamma}{\delta} < \frac{m}{\delta(\delta - \beta)}$.

Lehrsatz 11.

§. 14. Wenn im Kettenbruch P das n^{te} Glied $-\frac{p}{q}$, und das $(n+1)^{te}$ $-\frac{u}{v}$, im Kettenbruch Q hingegen das n^{te} Glied $\frac{p}{q}$, und das $(n+1)^{te}$ $\frac{u}{-v}$ ist; so sind, wenn die Zähler und Nenner des $(n-2)^{ten}$

Theilbruchs $\frac{\alpha}{\beta}$ in P und Q völlig einerley, die des $(n-1)^{\text{ten}}\ \frac{\gamma}{\delta}$, aber in Q mit denen in P zwar von einerley Gröſse, aber von entgegengesetzter Bedingung sind; die Zähler und Nenner des n^{ten} Theilbruchs in Q mit denen in P der Gröſse nach einerley, nur von entgegengesetzter Bedingung, die des $(n+1)^{\text{ten}}$ aber in P und Q völlig einerley. Sind hingegen die Zähler und Nenner des $(n-2)^{\text{ten}}$ Theilbruchs in Q mit denen in P von einerley Gröſse, aber von entgegengesetzter Bedingung, die des $(n-1)^{\text{ten}}$ aber in P und Q völlig einerley; so sind die Zähler und Nenner des n^{ten} Theilbruchs in P und Q völlig einerley, die des $(n+1)^{\text{ten}}$ hingegen in P und Q zwar von einerley Gröſse, aber von entgegengesetzter Bedingung.

Beweis. Denn es sey für den *ersten* Fall, wo $\frac{\alpha}{\beta}$ in P und Q völlig einerley ist, zuerst der $(n-1)^{\text{te}}$ Theilbruch in P, $\frac{\gamma}{\delta}$ in Q aber $\frac{-\gamma}{-\delta}$; so ist in P der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q-\alpha p}{\delta q-\beta p}$, in Q hingegen $\frac{-\gamma q+\alpha p}{-\delta q+\beta p}$ (§. 3.) $=\frac{-(\gamma q-\alpha p)}{-(\delta q-\beta p)}$, der $(n+1)^{\text{te}}$ aber sowohl in P als Q, $\frac{\gamma q v-\alpha p v-\gamma u}{\delta q \gamma-\beta p v-\delta u}$ (§. 3.). Ist zweytens in P der $(n-1)^{\text{te}}$ Theilbruch $\frac{-\gamma}{-\delta}$, in Q hingegen $\frac{\gamma}{\delta}$; so ist in P der n^{te} Theilbruch $\frac{-\gamma q-\alpha p}{-\delta q-\beta p}$ $=\frac{-\gamma q+\alpha p}{-\delta q+\beta p}$, in Q hingegen $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p}$, der $(n+1)^{\text{te}}$ aber in P und Q, $\frac{-\gamma q v-\alpha p v+\gamma u}{-\delta q v-\beta p v+\delta u}$. Ist drittens in P der $(n-1)^{\text{te}}$ Theilbruch $\frac{-\gamma}{\delta}$, in Q hingegen $\frac{\gamma}{-\delta}$; so ist in P der n^{te} Theilbruch $\frac{-(\gamma q+\alpha p)}{\delta q+\beta p}$, in Q hingegen $\frac{\gamma q+\alpha p}{-(\delta q-\beta p)}$, der $(n+1)^{\text{te}}$ aber in P

und Q, $\frac{-\gamma qv - \alpha pv + \gamma u}{\delta qv - \beta pv - \delta u}$. Ist endlich in P der $(n-1)^{te}$ Theilbruch $\frac{\gamma}{-\delta}$, in Q hingegen $\frac{-\gamma}{\delta}$; so ist in P der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q - \alpha p}{-(\delta q + \beta p)}$, in Q hingegen $\frac{-(\gamma q - \alpha p)}{\delta q + \beta p}$, der $(n+1)^{te}$ aber in P und Q, $\frac{\gamma qv - \alpha pv - \gamma u}{-\delta qv - \beta pv + \delta u}$.

Eben so sey für den *zweyten* Fall, wo $\frac{\gamma}{\delta}$ in P und Q völlig einerley ist, zuerst in P der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$, in Q hingegen $\frac{-\alpha}{-\beta}$; so ist sowohl in P als Q der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q - \alpha p}{\delta q - \beta p}$ der $(n+1)^{te}$ aber in P, $\frac{\gamma qv - \alpha pv - \gamma u}{\delta qv - \beta pv - \delta u}$, in Q hingegen $\frac{-(\gamma qv - \alpha pv - \gamma u)}{-(\delta qv - \beta pv - \delta u)}$. Ist zweytens in P der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{-\alpha}{-\beta}$, in Q hingegen $\frac{\alpha}{\beta}$; so ist in P und Q der n^{te} $\frac{\gamma q + \alpha p}{\delta q + \beta p}$, der $(n+1)^{te}$ aber in P, $\frac{\gamma qv + \alpha pv - \gamma u}{\delta qv + \beta pv - \delta u}$, in Q hingegen $\frac{-(\gamma qv + \alpha pv - \gamma u)}{-(\delta qv + \beta pv - \delta u)}$. Ist drittens in P der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{-\alpha}{\beta}$, in Q hingegen $\frac{\alpha}{-\beta}$; so ist der n^{te} Theilbruch in P und Q, $\frac{\gamma q + \alpha p}{\delta q - \beta p}$, der $(n+1)^{te}$ aber in P, $\frac{\gamma qv + \alpha pv - \gamma u}{\delta qv - \beta pv - \delta u}$, in Q hingegen $\frac{-(\gamma qv + \alpha pv - \gamma u)}{-(\delta qv - \beta pv - \delta u)}$. Ist endlich in P der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{-\beta}$, in Q hingegen $\frac{-\alpha}{\beta}$; so ist

der n^{te} in P und Q, $\frac{\gamma q - \alpha p}{\delta q + \beta p}$, der $(n+1)^{te}$ aber in P, $\frac{\gamma q v - \alpha p v - \gamma u}{\delta q v - \beta p v - \delta u}$, in Q hingegen $\frac{-(\gamma q v - \alpha p v - \gamma u)}{-(\delta q v - \beta p v - \delta u)}$. Also ist der Satz für beyde Fälle allgemein richtig.

Zusatz. Also ist es für die Gröſse eines Kettenbruchs, und aller seiner Theilbrüche einerley, ob die Nenner aller geraden Glieder, oder statt dessen, die Zähler aller Glieder, auſser dem ersten, negativ sind, und wenn man in den Theilbrüchen von den Ordnungszahlen 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15 etc. die man in dem einen Falle erhält, die Zähler und Nenner von entgegengesetzter Bedingung nimmt; so sind alle Theilbrüche nach der Ordnung mit denen im andern Falle völlig einerley, d. i. wenn

$$P = \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{-d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{-h + \ldots}}}} \quad \text{und } Q = \cfrac{a}{b - \cfrac{c}{d - \cfrac{e}{f - \cfrac{g}{h - \ldots}}}}$$

so ist $P = Q$, und jeder n^{te} Theilbruch in Q mit dem n^{ten} in P von einerley Gröſse, und nimmt man in den für Q erhaltenen Theilbrüchen von den Ordnungszahlen 2, 3, 6, 7, 10, 11 etc. die Zähler und Nenner von entgegengesetzter Bedingung; so ist jeder n^{te} Theilbruch in Q mit dem n^{ten} in P völlig einerley.

Denn da hier sowohl in P, als Q der erste Theilbruch $\frac{a}{b}$, und in P der zweyte $\frac{-ad}{-(bd-c)}$, in Q hingegen $\frac{ad}{bd-c}$ (§. 3.); so sind die beyden ersten Theilbrüche in P und Q von einerley Gröſse, und im ersten die Zähler und Nenner völlig einerley, im zweyten hingegen von entgegengesetzter Bedingung, folglich sind auch der dritte und vierte Theilbruch in P und Q von einerley Gröſse, die Zähler und Nenner des dritten aber in P von entgegengesetzter Bedingung als in Q, des vierten hingegen in P und Q völlig einerley (Lehrs. 11.), mithin ist der Satz für die vier ersten Theilbrüche wahr, also ist er auch für die vier nächstfolgenden (Lehrs. 11.), und so überhaupt für alle.

Lehrsatz 12.

§. 15. Wenn im Kettenbruch P das n^{te} Glied $\frac{p}{q}$ und das $(n+1)^{te}$ $\frac{u}{v}$, im Kettenbruch Q hingegen das n^{te} Glied $\frac{p}{-q}$, und das $(n+1)$ $\frac{u}{-v}$ ist; so sind, wenn die Zähler und Nenner des $(n-2)^{ten}$ Theilbruchs $\frac{\alpha}{\beta}$ in P und Q völlig einerley, die des $(n-1)^{ten}$ $\frac{\gamma}{\delta}$ hingegen in Q mit denen in P zwar von einerley Gröſse, aber von entgegengesetzter Bedingung sind, die Zähler und Nenner des n^{ten} Theilbruchs in P und Q völlig einerley, die des $(n+1)^{ten}$ in Q hingegen mit denen in P zwar von einerley Gröſse, aber von entgegengesetzter Bedingung.

Beweis. Denn der n^{te} Theilbruch ist sowohl in P, als Q, $\frac{\gamma q+\alpha p}{\delta q+\beta p}$, der $(n+1)^{te}$ hingegen ist in P, $\frac{\gamma q v+\alpha p v+\gamma u}{\delta q v+\beta p v+\delta u}$, in Q aber

$$\frac{-\gamma q v-\alpha p v-\gamma u}{-\delta q v-\beta p v-\delta u}\ (\S.\ 3.) = \frac{-(\gamma q v+\alpha p v+\gamma u)}{-(\delta q v+\beta p v+\delta u)}.$$

Zusatz. Also ist es für die Gröſse eines Kettenbruchs und aller seiner Theilbrüche einerley, ob in ihm bloſs der Zähler des zweyten Gliedes negativ ist, oder ob statt dessen, die Nenner aller seiner Glieder, auſser dem ersten, negativ sind, und man in den geraden Theilbrüchen, die man in dem einen Fall erhält, die Zähler und Nenner von entgegengesetzter Bedingung nimmt; so sind alle Theilbrüche nach der Ordnung mit denen im andern Falle völlig einerley, d. i. wenn

$$P = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \ldots \quad \text{und} \quad Q = \frac{a}{b} + \frac{c}{-d} + \frac{e}{-f} + \frac{g}{-h} + \ldots$$

so ist $P = Q$, und jeder n^{te} Theilbruch in P mit dem in Q von einerley Gröſse, und nimmt man in den geraden Theilbrüchen in P die Zähler und Nenner von entgegengesetzter Bedingung; so sind alle Theilbrüche in P mit denen in Q völlig einerley.

Denn da hier sowohl in P als Q der erste Theilbruch $\frac{a}{b}$, und in P der zweyte $\frac{ad}{bd-c}$, in Q hingegen $\frac{-ad}{-(bd-c)}$ (§. 3.); so sind die beyden ersten Theilbrüche in P und Q von einerley Gröſse, und der Zähler und Nenner des ersten in P mit denen in Q völlig einerley, des zweyten hingegen in Q mit denen in P von entgegengesetzter Bedingung, folglich gilt eben dieses auch vom dritten und vierten Theilbruche, mithin auch vom fünften und sechsten, und so von allen überhaupt (Lehrs. 12.)

Lehrsatz 13.

§. 16. Wenn $P = \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h + \ldots}}}}$ und $Q = \cfrac{1}{0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h + \ldots}}}}}$

so ist der $(n+1)^{te}$ Theilbruch in Q dem umgekehrten n^{ten} in P gleich.

Beweis. Denn es sey in P der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$, der $(n-1)^{te}$ $\frac{\gamma}{\delta}$, und in Q der $(n-1)^{te}$ $\frac{\beta}{\alpha}$, der n^{te} $\frac{\delta}{\gamma}$, und das n^{te} Glied $\frac{p}{q}$ in P das $(n+1)^{te}$ in Q; so ist in P der n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma q + \alpha p}{\delta q + \beta p}$, und in Q der $(n+1)^{te}$ $\frac{\delta q + \beta p}{\gamma q + \alpha p}$ (§. 3.). Ist daher der Satz von zwey nächsten Theilbrüchen in Q wahr; so ist er es auch vom nächstfolgenden. Nun aber ist er von den beyden ersten wahr. Denn in Q ist der erste Theilbruch $\frac{1}{0}$, der zweyte $\frac{b}{a}$, und in P der 0^{te} $\frac{0}{1}$, und der erste $\frac{a}{b}$. Also

ist der Satz auch vom dritten, und so von allen folgenden Theilbrüchen in Q wahr. Z. B.

Glieder.	Theilbrüche.
0	0 : 1
$\frac{1}{0}$	1 : 0
$\frac{a}{b}$	$b : a$
$\frac{c}{d}$	$bd + c : ad$

u. s. w.

Zusatz 1. Wenn man also in Q den ersten Theilbruch $\frac{1}{0}$ zum 0^{ten}, und den zweyten $\cfrac{1}{0 + \cfrac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ zum ersten annimmt; so ist der n^{te} Theilbruch in Q allemal der umgekehrte n^{te} in P, und man bekommt die Theilbrüche in Q nacheinander eben so, wie §. 4. gezeigt worden, nämlich:

Glieder.	Theilbrüche.
0	1 : 0
$\frac{a}{b}$	$b : a$
$\frac{c}{d}$	$bd + c : ad$
$\frac{e}{f}$	$bdf + cf + be : adf + ae$

u. s. w.

Zusatz 2. Also bekömmt man die Theilbrüche für Q, wenn man die für P gefundenen umkehrt (§. 4.).

Zusatz 3. Wenn man daher den 0^{ten} Theilbruch $\frac{1}{0}$ setzt; so wird

$$\cfrac{1}{0 + \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h \ldots}}}}} = \cfrac{b}{a + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h \ldots}}}} \quad \text{(Z. 1.)}$$

Aufgabe 2.

§. 17. Einen Kettenbruch, in welchem die Zähler und Nenner der Glieder Brüche, oder Quotienten ganzer Zahlen sind, in einen

solchen zu verwandeln, in welchem die Zähler und Nenner der Glieder lauter ganze Zahlen sind.

Auflösung. Man multiplicire im ersten Gliede des gegebenen Kettenbruchs den Dividend des Zählers durch den Divisor des Nenners, und den Dividend des Nenners durch den Divisor des Zählers, so giebt das erste Product den Zähler, und das zweyte den Nenner für das erste Glied des neuen Kettenbruchs.

Alle übrigen Glieder für diesen findet man auf folgende allgemeine Art: Man multiplicire in jedem n^{ten} Gliede des gegebenen Kettenbruchs das Product aus dem Dividend des Zählers in den Divisor des Nenners durch das Product der beyden Divisoren des $(n-1)^{ten}$ Gliedes; so hat man für das n^{te} Glied des neuen Kettenbruchs den Zähler, und das Product aus dem Dividend des Nenners im n^{ten} Gliede in den Divisor des Zählers giebt seinen Nenner. Z. B.

$$\cfrac{a:m}{b:n+\cfrac{c:p}{d:q+\cfrac{e:r}{f:s+\cfrac{g:t}{h:u+\ldots}}}} = \cfrac{na}{mb+\cfrac{mncq}{pd+\cfrac{pqes}{rf+\cfrac{rsgu}{th+\ldots}}}}$$

Beweis. Man nenne den gegebenen Kettenbruch P, und den neuen Q. Nun sey in P der $(n-3)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$, der $(n-2)^{te}$ $\frac{\gamma}{\delta}$, und das $(n-1)^{te}$ Glied $\frac{g:h}{i:k}$; so ist der $(n-1)^{te}$ Theilbruch $\frac{\gamma i}{k}+\frac{\alpha g}{h}:\frac{\delta i}{k}+\frac{\beta g}{h}=\frac{\gamma ih+\alpha\gamma k}{\delta ih+\beta\gamma k}$, und wenn man daher das n^{te} Glied $\frac{t:u}{v:w}$ setzt; so ist der n^{te} Theilbruch $\left(\frac{\gamma i}{k}+\frac{\alpha g}{h}\right)\frac{v}{w}+\frac{\gamma t}{u}:\left(\frac{\delta i}{k}+\frac{\beta g}{h}\right)\frac{v}{w}+\frac{\delta t}{u}$ (§. 3.) $=\frac{(\gamma ih+\alpha\gamma k)uv+\gamma hktw}{(\delta ih+\beta\gamma k)uv+\delta hktw}$. Nun setze man, die gegebene Auflösung sey für den $(n-3)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$, und $(n-1)^{ten}$ Theilbruch wahr, folglich in Q gleichfalls der $(n-3)^{te}$ Theilbruch $\frac{\alpha}{\beta}$, der $(n-2)^{te}$ $\frac{\gamma}{\delta}$, der $(n-1)^{te}$ $\frac{\gamma ih+\alpha\gamma k}{\delta ih+\beta\gamma k}$, und das n^{te} Glied

$\frac{hktw}{uv}$; so ist in Q der n^{te} Theilbruch ebenfalls $\frac{(\gamma ih+\alpha\gamma k)uv+\gamma hktw}{(\delta ih+\beta\gamma k)uv+\delta hktw}$ (§. 3.), mithin die Auflösung auch für den n^{ten} Theilbruch wahr. Nun aber ist dieselbe für die drey ersten Theilbrüche wahr, [denn in P ist der erste Theilbruch $\frac{a}{m}:\frac{b}{n} = na:mb$, der 2^{te} $\frac{ad}{mq}:\frac{bd}{nq}+\frac{c}{p}$ $= adnp:(mbdp+mcnq)$, und der dritte

$$\left(\frac{adf}{mqf}+\frac{ae}{mr}\right):\left(\frac{bdf}{nqf}+\frac{cf}{ps}+\frac{be}{nr}\right) \text{ (§. 3.)}$$

$$=(adnpfr+aenpqs):(mbdpfr+mcnqfr+mbepqs),$$

in Q aber sind die drey ersten Theilbrüche eben so grofs (§. 3.)], also ist sie auch für den vierten, fünften, und alle folgende Theilbrüche wahr.

Zusatz 1. Also ist, wenn alle Buchstaben *ganze* Zahlen bedeuten,

$$1)\ \cfrac{a}{b:n+\cfrac{c}{d:q+\cfrac{e}{f:s+\cfrac{g}{h:u+\ldots}}}} = \cfrac{na}{b+\cfrac{ncq}{d+\cfrac{qes}{f+\cfrac{sgu}{h+\ldots}}}}$$

$$2)\ \cfrac{1}{b:n+\cfrac{1}{d:q+\cfrac{1}{f:s+\cfrac{1}{h:u+\ldots}}}} = \cfrac{n}{b+\cfrac{nq}{d+\cfrac{qs}{f+\cfrac{su}{h+\ldots}}}}$$

$$3)\ \cfrac{1}{b:n+\cfrac{1}{d:n+\cfrac{1}{f:n+\cfrac{1}{h:n+\ldots}}}} = \cfrac{n}{b+\cfrac{n^2}{d+\cfrac{n^2}{f+\cfrac{n^2}{h+\ldots}}}}$$

$$4)\ \cfrac{a:m}{b+\cfrac{c:p}{d+\cfrac{e:r}{f+\cfrac{g:t}{h+\ldots}}}} = \cfrac{a}{mb+\cfrac{mc}{pd+\cfrac{pe}{fr+\cfrac{rg}{th+\ldots}}}}$$

$$5)\ \frac{a:m}{1}+\frac{c:p}{1}+\frac{e:r}{1}+\frac{g:t}{1}+\ldots = \frac{a}{m}+\frac{mc}{p}+\frac{pe}{r}+\frac{rg}{t}+\ldots$$

$$6)\ \frac{a:m}{1}+\frac{c:m}{1}+\frac{e:m}{1}+\frac{g:m}{1}+\ldots = \frac{a}{m}+\frac{mc}{m}+\frac{me}{m}+\frac{mg}{m}+\ldots$$

u. s. w.

Aufgabe 3.

§. 18. Einen jeden Quotienten $\frac{A}{B}$, oder $\frac{B}{A}$, was für Zahlen oder Reihen von Zahlen auch A, B seyn mögen, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man verfahre eben so, als wenn man den grösesten gemeinschaftlichen Theiler zweyer ganzen Zahlen sucht. Nämlich man dividire, um den Kettenbruch für $\frac{A}{B}$ zu finden, B durch A. Bleibt ein Rest, so dividire man durch ihn den vorigen Divisor A. Bleibt wieder ein Rest, so dividire man durch ihn wieder den vorigen Rest, den man als Divisor annahm, u. s. w. Auf diese Art fahre man mit dem Dividiren fort, bis entweder der Rest Null wird, oder so lange, als man will, und bemerke nach der Reihe die Quotienten C, D, E, F, G etc., die man bey jeder Division erhält. Alsdenn nehme man $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{E}$, $\frac{1}{F}$, $\frac{1}{G}$ etc. für die Glieder des verlangten Kettenbruchs; so ist

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\frac{1}{F}+\frac{1}{G}+\ldots$$

und $\frac{B}{A} = \frac{1}{0 + \frac{1}{C + \frac{1}{D + \frac{1}{E + \frac{1}{F + \frac{1}{G + \ldots}}}}}} = \frac{C}{1 + \frac{1}{D + \frac{1}{E + \frac{1}{F + \frac{1}{G + \ldots}}}}}$

wenn man im letzten Falle, wo $\frac{C}{1}$ das erste Glied ist, den 0^{ten} Theilbruch $\frac{1}{0}$ setzt (§. 16. Z. 2.).

Beweis. Denn es seyen die beym Dividiren gefundenen Reste nach der Ordnung c, d, e, f, g etc.; so ist $\frac{B}{A} = C + \frac{c}{A}$, also $\frac{A}{B} = \frac{1}{C + \frac{c}{A}}$. Ferner ist $\frac{A}{c} = D + \frac{d}{c}$, $\frac{c}{d} = E + \frac{e}{d}$, $\frac{d}{e} = F + \frac{f}{e}$, $\frac{e}{f} = G + \frac{g}{f}$ u. s. w. Nun ist $\frac{c}{A} = 1 : \frac{A}{c} = \frac{1}{D + \frac{d}{c}}$, $\frac{d}{c} = 1 : \frac{c}{d} = \frac{1}{E + \frac{e}{d}}$, $\frac{e}{d} = 1 : \frac{d}{e} = \frac{1}{F + \frac{f}{e}}$, $\frac{f}{e} = 1 : \frac{E}{f} = \frac{1}{G + \frac{g}{f}}$ u. s. w.

Also ist $\frac{A}{B} = \frac{1}{C + \frac{1}{D + \frac{1}{E + \frac{1}{F + \frac{1}{G + \ldots}}}}}$

Gesetzt nun, statt B durch A, dividirte man A durch B, und nähme zum ersten Quotienten 0 an; so ist der erste Rest A, folglich $\frac{A}{B} = 0 + \frac{A}{B}$, mithin

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{0 + \frac{A}{B}}, \text{ also } \frac{B}{A} = \frac{1}{0 + \frac{1}{C + \frac{1}{D + \frac{1}{E + \frac{1}{F + \frac{1}{G + \ldots}}}}}}$$

Z. B. Es soll der Bruch $\frac{421}{972}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden; so ist

$$\begin{array}{r|r|l}
421 & 972 & 2 \\
 & 842 & \\
\hline
130 & 421 & 3 \\
 & 390 & \\
\hline
31 & 130 & 4 \\
 & 124 & \\
\hline
6 & 31 & 5 \\
 & 30 & \\
\hline
1 & 6 & 6 \\
 & 6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Also ist $\frac{421}{972} = \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}$ und $\frac{972}{421} = \frac{1}{0+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}}}}$

Aufgabe 4.

§. 19. Für einen gegebenen Kettenbruch einen jeden seiner Theilbrüche aufser der Reihe zu finden.

Auflösung, Man nenne, um alles desto deutlicher zu übersehen, den Zähler des ersten Gliedes $\overset{1}{a}$, des zweyten $\overset{2}{a}$, des dritten $\overset{3}{a}$ etc., also des n^{ten} $\overset{n}{a}$, und eben so den Nenner des ersten Gliedes $\overset{1}{b}$, des zweyten $\overset{2}{b}$, des dritten $\overset{3}{b}$ etc., also des n^{ten} $\overset{n}{b}$, so dafs der gegebene allgemeine Kettenbruch

$$\frac{\overset{1}{a}}{\overset{1}{b}+\frac{\overset{2}{a}}{\overset{2}{b}+\frac{\overset{3}{a}}{\overset{3}{b}+\frac{\overset{4}{a}}{\overset{4}{b}+\frac{\overset{5}{a}}{\overset{5}{b}+\ldots}}}}}$$

ist; so ist der n^{te} Theilbruch

$$\overset{1234}{abbb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1345}{aabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{12456}{ababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{123567}{abbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{13567}{aaabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{1234678}{abbbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{134678}{aababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{124678}{abaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{12345789}{abbbbabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{1345789}{aabbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1245789}{abababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1235789}{abbaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{135789}{aaaabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots \text{ etc.}$$

$$\overset{1234}{bbbb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{234}{abb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1345}{babb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{12456}{bbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{2456}{aabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{123567}{bbbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{23567}{ababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{13567}{baabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1234678}{bbbbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{234678}{abbabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{134678}{bababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{124678}{bbaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{24678}{aaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{12345789}{bbbbbabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{2345789}{abbbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1345789}{babbabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1245789}{bbababb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{245789}{aababb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{1235789}{bbbaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{235789}{abaabb}\ldots\overset{n}{b}+\overset{135789}{baaabb}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots \text{ etc.}$$

wobey sich von selbst versteht, dafs in jedem Producte, sowohl des Zählers als des Nenners des n^{ten} Theilbruchs, alle diejenigen Factoren, deren Ordnungszahl gröfser als n ist, wegfallen, und als 1 anzusehen sind, aufserdem aber wohl zu merken ist, dafs alle diejenigen Producte, in welchen über a eine höhere Ordnungszahl als n vorkommt, als Nullen zu betrachten, und ganz wegzulassen sind.

Will man die obige Reihe sowohl im Zähler als im Nenner weiter fortsetzen; so darf man nur in allen den Producten, in welchen der letzte gegebene Zähler vorkommt, statt dieses, das Product aus dem nächstfolgenden Zähler in denjenigen Nenner, der zwey Grade niedriger, als dieser ist, setzen, und alsdenn noch in allen den Producten, in welchen der vorletzte Zähler vorkommt, zu diesem blofs den vorgenannten nächstfolgenden Zähler als Factor hinzufügen, das Product der Nenner bis $\overset{n}{b}$ aber von demjenigen Nenner anfangen, der um einen Grad höher ist, als der vorgedachte nächstfolgende Zähler.

Auf diese Art bekommt man, ohne dabey viel denken zu dürfen, durch blofses Hinschreiben alle die neuen Producte, die zu den schon vorhandenen, sowohl im Zähler als im Nenner zu addiren sind.

Z. B. Will man die obige Reihe im Zähler und Nenner, die schon die sieben ersten Theilbrüche giebt, für den achten Theilbruch fortsetzen; so darf man nur in allen den Producten, in welchen $\overset{7}{a}$ vorkommt, $\overset{6}{b}\,\overset{8}{a}$ statt $\overset{7}{a}$, und in allen denen, in welchen $\overset{6}{a}$ vorkommt, bloſs $\overset{7}{a}$ hinzusetzen. Also sind die neuen Producte für den Zähler diese:

$$\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b},$$

und für den Nenner folgende:

$$\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}$$

$$+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b}.$$

Beweis. Denn für die fünf ersten Theilbrüche ist die allgemeine Formel richtig, wie folgendes Schema zeigt:

Werthe von n	Theilbrüche.
$n=1$	$\overset{1}{a}:\overset{1}{b}$
$n=2$	$\overset{1}{a}\overset{2}{b}:\overset{1}{b}\overset{2}{b}+\overset{2}{a}$
$n=3$	$\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}:\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}$
$n=4$	$\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}:\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}$
$n=5$	$\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}:\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}$ $+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{5}{a}$

indem diese 5 ersten Theilbrüche ganz dieselben sind, wie man sie nach §. 4. findet. Daſs sie aber auch für alle folgende Theilbrüche, wenn die Reihe sowohl des Zählers als des Nenners vorschriftsmäſsig fortgesetzt wird, richtig ist, läſst sich folgendermaſsen beweisen:

Es erhellt schon aus dem Schema der ersten fünf Theilbrüche, daſs jeder Theilbruch, den ersten ausgenommen, sowohl in Rücksicht des Zählers, als des Nenners, aus zwey verschiedenen Theilen besteht, von denen der erste eine Summe von Producten ist, die alle den gemeinschaftlichen Factor $\overset{n}{b}$ haben, der zweyte hingegen eine Summe von Producten, die alle den gemeinschaftlichen Factor $\overset{n}{a}$ haben, und es ist nach §. 4. von selbst klar, daſs dieses schlechterdings auch von allen folgenden Theilbrüchen gilt. Man drücke daher in jedem Theilbruch jede dieser Summen von Producten durch einen Buchstaben aus, und setze, es sey der $(n-2)^{te}$ Theilbruch $\alpha \overset{n-2}{b} + \gamma \overset{n-2}{a} : \beta \overset{n-2}{b} + \delta \overset{n-2}{a}$, der $(n-1)^{te}$ Theilbruch $\varepsilon \overset{n-1}{b} + \eta \overset{n-1}{a} : \zeta \overset{n-1}{b} + \theta \overset{n-1}{a}$, und das n^{te} Glied $\frac{\overset{n}{a}}{\overset{n}{b}}$; so ist der n^{te} Theilbruch

$$\frac{\varepsilon \overset{n-1}{b} \overset{n}{b} + \eta \overset{n-1}{a} \overset{n}{b} + \alpha \overset{n-2}{b} \overset{n}{a} + \gamma \overset{n-2}{a} \overset{n}{a}}{\zeta \overset{n-1}{b} \overset{n}{b} + \theta \overset{n-1}{a} \overset{n}{b} + \beta \overset{n-2}{b} \overset{n}{a} + \delta \overset{n-2}{a} \overset{n}{a}} \quad (\S.\ 3.).$$

Wenn man also aus zwey vorhergehenden Theilbrüchen den folgenden finden will; so darf man nur zu jedem Product des letzten $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs, sowohl im Zähler als Nenner desselben, den Nenner $\overset{n}{b}$ des folgenden Theilbruchs hinzusetzen, und in allen Producten, wo der letzte Zähler $\overset{n-1}{a}$ vorkommt, statt $\overset{n-1}{a}$ das Product $\overset{n-2}{b}\overset{n}{a}$ setzen, in denjenigen aber, wo $\overset{n-2}{a}$ vorkommt, bloſs $\overset{n}{a}$ hinzufügen. Also ist die Auflösung richtig.

Zusatz 1. Die Zahl der Producte, welche sowohl der Zähler als der Nenner des n^{ten} Theilbruchs enthält, wird durch folgende Reihen gegeben:

Ordnungszahlen der Theilbrüche;	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	etc.
Zahl der Producte im Zähler:	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55	etc.
Zahl der Producte im Nenner:	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	89	etc.,

wo jedes folgende Glied die Summe der beyden vorhergehenden ist. Dieses ist von denersteu acht Theilbrüchen unmittelbar klar, und eben so einleuchtend ist auch die Richtigkeit für alle folgende Theilbrüche.

Zusatz 2. Kürzer ausgedrückt ist der n^{te} Theilbruch

$$\frac{\begin{array}{l}\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\dots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\dots\overset{n}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\dots\overset{n}{b}+(\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a})\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{7}{b}\dots\overset{n}{b}\\ +(\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a})\overset{6}{a}\overset{7}{b}\overset{8}{b}\dots\overset{n}{b}+(\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a})\overset{7}{a}\overset{8}{b}\overset{9}{b}\dots\overset{n}{b}\\ +\dots+\dots+\dots+\dots\text{ etc.}\end{array}}{\begin{array}{l}\overset{1}{b}\overset{2}{b}\dots\overset{n}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\dots\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\dots\overset{n}{b}+(\overset{1}{b}\overset{2}{b}+\overset{2}{a})\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\dots\overset{n}{b}+(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a})\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{7}{b}\dots\overset{n}{b}\\ +(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a})\overset{6}{a}\overset{7}{b}\overset{8}{b}\dots\overset{n}{b}+(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\\ \qquad+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{5}{a}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{5}{a})\overset{7}{a}\overset{8}{b}\overset{9}{b}\dots\overset{n}{b}\\ +\dots+\dots+\dots\text{ etc.}\end{array}}$$

Diese Reihe im Zähler und Nenner giebt, wie die obige, schon die sieben ersten Theilbrüche. Will man sie für den achten fortsetzen; so darf man nur zu allen Producten der letzten Parenthese $\overset{6}{b}$, und zu allen Producten der vorletzten Parenthese $\overset{6}{a}$ hinzusetzen, alle diese Producte in eine einzige Parenthese schliefsen, und diese durch $\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\dots\overset{n}{b}$ multipliciren. Auf diese Art ist das neue Product für den Zähler

$$\left[\begin{array}{l}\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\\ +\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\end{array}\right]\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\dots\overset{n}{b}$$

und für den Nenner

$$\left[\begin{array}{l}\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\\ +\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{5}{a}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\\ +\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{6}{a}+\overset{1}{b}\overset{3}{a}\overset{4}{b}\overset{6}{a}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{4}{a}\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{3}{a}\overset{6}{a}\end{array}\right]\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\dots\overset{n}{b}$$

Auf eine ähnliche Art läſst sich die Reihe sowohl im Zähler als im Nenner für alle folgende Theilbrüche fortsetzen.

Zusatz 3 Wenn daher in einem Kettenbruch die Zähler aller Glieder 1 sind, mithin dieser

$$\cfrac{1}{\overset{1}{b}+\cfrac{1}{\overset{2}{b}+\cfrac{1}{\overset{3}{b}+\cfrac{1}{\overset{4}{b}+\cfrac{1}{\overset{5}{b}+\ldots}}}}}$$

ist; so ist der n^{te} Theilbruch folgender:

$$\frac{\begin{array}{l}\overset{2}{b}\overset{3}{b}..\overset{n}{b}+\overset{4}{b}\overset{5}{b}..\overset{n}{b}+\overset{2}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}..\overset{n}{b}+\left(\overset{2}{b}\overset{3}{b}+1\right)\overset{6}{b}\overset{7}{b}..\overset{n}{b}\\ +\left(\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{4}{b}+\overset{2}{b}\right)\overset{7}{b}\overset{8}{b}..\overset{n}{b}+\left(\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{2}{b}\overset{5}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}+1\right)\overset{8}{b}\overset{9}{b}..\overset{n}{b}\\ +\left(\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{2}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{6}{b}+\overset{6}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{4}{b}+\overset{2}{b}\right)\overset{9}{b}\overset{10}{b}..\overset{n}{b}\\ +\ldots+\ldots+\ldots\text{ etc.}\end{array}}{\begin{array}{l}\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}..\overset{n}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}..\overset{n}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}..\overset{n}{b}+\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}+1\right)\overset{5}{b}\overset{6}{b}..\overset{n}{b}\\ +\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{3}{b}+\overset{1}{b}\right)\overset{6}{b}\overset{7}{b}..\overset{n}{b}+\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}+1\right)\overset{7}{b}\overset{8}{b}..\overset{n}{b}\\ +\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{5}{b}+\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{3}{b}+\overset{1}{b}\right)\overset{8}{b}\overset{9}{b}..\overset{n}{b}\\ +\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}..\overset{6}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{5}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{6}{b}+\overset{3}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{6}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\right.\\ \qquad\qquad\left.+\overset{1}{b}\overset{4}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}+1\right)\overset{9}{b}\overset{10}{b}..\overset{n}{b}\\ +\ldots+\ldots+\ldots\text{ etc.}\end{array}}$$

Hier gelten jedesmal nur diejenigen Producte, in welchen die Ziffer über der ersten b nach der Parenthese noch nicht um 2 gröſser ist, als die Ordnungszahl n des verlangten Theilbruchs. Die vorstehende Reihe giebt also schon die acht ersten Theilbrüche. Will man sie für den neunten Theilbruch fortsetzen; so darf man nur jedes Product der letzten Parenthese durch $\overset{7}{b}$ multiplicirt, mit den unveränderten Producten der vorletzten Parenthese in eine einzige Parenthese einschlieſsen, und diese durch $\overset{10}{b}\ \overset{11}{b}\ \ldots\ \overset{n}{b}$ multipliciren. Auf diese Art ist das neue Product für den Zähler

$$\left(\overset{2}{b}\overset{3}{b}\,..\,\overset{7}{b}+\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{2}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{7}{b}+\overset{4}{b}\overset{7}{b}+\overset{2}{b}\overset{7}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{4}{b}\overset{5}{b}\right.$$
$$\left.+\overset{2}{b}\overset{5}{b}+\overset{2}{b}\overset{3}{b}+1\right)\overset{10}{b}\,\overset{11}{b}\,..\,\overset{n}{b}$$

und für den Nenner

$$\left(\overset{1}{b}\overset{2}{b}\,..\,\overset{7}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\,..\,\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{5}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{3}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{6}{b}\overset{7}{b}\right.$$
$$+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{7}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{7}{b}+\overset{7}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{3}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{4}{b}\overset{5}{b}+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{5}{b}+\overset{5}{b}$$
$$\left.+\overset{1}{b}\overset{2}{b}\overset{3}{b}+\overset{3}{b}+\overset{1}{b}\right)\overset{10}{b}\,\overset{11}{b}\,..\,\overset{n}{b}$$

Und eben so kann man sie auch für alle folgende Theilbrüche fortsetzen.

Zusatz 4. Wenn hingegen die Nenner aller Glieder 1 sind, mithin der Kettenbruch

$$\cfrac{\overset{1}{a}}{1+\cfrac{\overset{2}{a}}{1+\cfrac{\overset{3}{a}}{1+\cfrac{\overset{4}{a}}{1+\cfrac{\overset{5}{a}}{1+\dots}}}}}$$

ist; so ist der n^{te} Theilbruch

$$\frac{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}+\left(\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\right)\overset{5}{a}+\left(\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}\right)\overset{6}{a}+\left(\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}+\overset{1}{a}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\right)\overset{7}{a}\\+\left(\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}+\overset{1}{a}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\right)\overset{8}{a}+\,..\,+\,..\,+\text{ etc.}\end{array}}{\begin{array}{l}1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\left(1+\overset{2}{a}\right)\overset{4}{a}+\left(1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}\right)\overset{5}{a}+\left(1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\right)\overset{6}{a}\\+\left(1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}+\overset{5}{a}+\overset{2}{a}\overset{5}{a}+\overset{3}{a}\overset{5}{a}\right)\overset{7}{a}\\+\left(1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}+\overset{5}{a}+\overset{2}{a}\overset{5}{a}+\overset{3}{a}\overset{5}{a}+\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{6}{a}+\overset{3}{a}\overset{6}{a}+\overset{4}{a}\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\right)\overset{8}{a}\\+\dots+\dots+\dots\text{ etc.}\end{array}}$$

Hier ist das letzte von den jedesmal geltenden Producten dasjenige, in welchem die Ziffer über der a nach der Parenthese der Ordnungszahl n des Theilbruchs gleich ist. Die vorstehende Formel giebt also schon die acht ersten Theilbrüche. Will man sie für den neunten fortsetzen; so darf man nur die Producte der letzten Parenthese mit denen der vorletzten durch $\overset{7}{a}$ multiplicirt in eine einzige Parenthese

schliefsen, und diese durch $\overset{9}{a}$ multipliciren. Also ist das neue Product für den Zähler

$$\left(\overset{1}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}+\overset{1}{a}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}+\overset{1}{a}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}\overset{6}{a}+\overset{1}{a}\overset{7}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{7}{a}+\overset{1}{a}\overset{4}{a}\overset{7}{a}+\overset{1}{a}\overset{5}{a}\overset{7}{a}+\overset{1}{a}\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{7}{a}\right)\overset{9}{a}$$

und für den Nenner

$$\left[\begin{array}{l}1+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\overset{4}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}+\overset{5}{a}+\overset{2}{a}\overset{5}{a}+\overset{3}{a}\overset{5}{a}+\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{6}{a}+\overset{3}{a}\overset{6}{a}+\overset{4}{a}\overset{6}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{6}{a}\\+\overset{7}{a}+\overset{2}{a}\overset{7}{a}+\overset{3}{a}\overset{7}{a}+\overset{4}{a}\overset{7}{a}+\overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{7}{a}+\overset{5}{a}\overset{7}{a}+\overset{2}{a}\overset{5}{a}\overset{7}{a}+\overset{3}{a}\overset{5}{a}\overset{7}{a}\end{array}\right]$$

Und so kann man die Formel auch für alle folgende Theilbrüche fortsetzen.

Zusatz 5. Wenn der erste Zähler $\overset{1}{a} = 0$ ist; so ist der ganze Kettenbruch $= 0$. Ist $\overset{2}{a} = 0$; so ist der Kettenbruch dem ersten Theilbruch gleich. Ist $\overset{3}{a} = 0$; so ist er dem zweyten Theilbruch gleich etc., und überhaupt wenn $\overset{r}{a} = 0$ ist; so ist er dem $(r-1)^{ten}$ Theilbruch gleich (Z. 2.).

Zusatz 6. Wenn hingegen der erste Nenner $\overset{1}{b} = 0$ ist; so sind im Nenner des n^{ten} Theilbruchs die Producte, welche Null werden, der Ordnung nach folgende:

1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33 etc.

der Zähler desselben aber bleibt, da in diesem gar nicht $\overset{1}{b}$ vorkommt, unverändert.

Ist $\overset{2}{b} = 0$; so werden im Zähler des n^{ten} Theilbruchs alle diejenigen Producte Null, die für $\overset{1}{b} = 0$ im Nenner desselben Null wurden, im Nenner desselben aber sind die Null werdenden Producte der Ordnung nach diese:

1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33 etc.

Ist $\overset{3}{b} = 0$; so werden im Zähler des n^{ten} Theilbruchs alle diejenigen Producte Null, die für $\overset{2}{b} = 0$ im Nenner desselben Null wurden,

im Nenner desselben aber sind die Null werdenden Producte nach der Ordnung diese:

1, 2, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 27, 28, 30, 31, 35, 36 etc.

Ist $\overset{4}{b} = 0$; so werden im Zähler des n^{ten} Theilbruchs alle diejenigen Producte Null, die für $\overset{3}{b} = 0$ im Nenner desselben Null wurden, im Nenner aber sind die Null werdenden Producte diese:

1, 2, 3, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 35, 36, 37 etc.

u. s. w.

Zusatz 7. Man setze in Zus. 2. $\overset{2}{b}\overset{3}{b} + \overset{3}{a} = {}^{1}\mathfrak{A}$, ${}^{1}\mathfrak{A}\overset{4}{b} + \overset{2}{b}\overset{4}{a} = {}^{2}\mathfrak{A}$, ${}^{2}\mathfrak{A}\overset{5}{b} + {}^{1}\mathfrak{A}\overset{5}{a} = {}^{3}\mathfrak{A}$, ${}^{3}\mathfrak{A}\overset{6}{b} + {}^{2}\mathfrak{A}\overset{6}{a} = {}^{4}\mathfrak{A}$, ${}^{4}\mathfrak{A}\overset{7}{b} + {}^{3}\mathfrak{A}\overset{7}{a} = {}^{5}\mathfrak{A}$ u. s. w.

Eben so setze man $\overset{1}{b}\overset{2}{b} + \overset{2}{a} = {}^{1}\mathfrak{B}$, ${}^{1}\mathfrak{B}\overset{3}{b} + \overset{1}{b}\overset{3}{a} = {}^{2}\mathfrak{B}$, ${}^{2}\mathfrak{B}\overset{4}{b} + {}^{1}\mathfrak{B} + \overset{4}{a} = {}^{3}\mathfrak{B}$, ${}^{3}\mathfrak{B}\overset{5}{b} + {}^{2}\mathfrak{B}\overset{5}{a} = {}^{4}\mathfrak{B}$, ${}^{4}\mathfrak{B}\overset{6}{b} + {}^{3}\mathfrak{B}\overset{6}{a} = {}^{5}\mathfrak{B}$, ${}^{5}\mathfrak{B}\overset{7}{b} + {}^{4}\mathfrak{B}\overset{7}{a} = {}^{6}\mathfrak{B}$ u. s. w.; so ist der n^{te} Theilbruch

$$\frac{\left[\begin{array}{l} {}^{2}\mathfrak{A}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{1}\mathfrak{A}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{7}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{2}\mathfrak{A}\overset{6}{a}\overset{7}{b}\overset{8}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{3}\mathfrak{A}\overset{7}{a}\overset{8}{b}\overset{9}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{4}\mathfrak{A}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b} \\ \quad + {}^{5}\mathfrak{A}\overset{9}{a}\overset{10}{b}\overset{11}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{6}\mathfrak{A}\overset{10}{a}\overset{11}{b}\overset{12}{b}\ldots\overset{n}{b} + \ldots\ldots + {}^{n-4}\mathfrak{A}\overset{n}{a} \end{array}\right] \cdot \overset{2}{a}}{\begin{array}{l} {}^{2}\mathfrak{B}\overset{4}{b}\overset{5}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{1}\mathfrak{B}\overset{4}{a}\overset{5}{b}\overset{6}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{2}\mathfrak{B}\overset{5}{a}\overset{6}{b}\overset{7}{b}\ldots {}^{3}\mathfrak{B}\overset{6}{a}\overset{7}{b}\overset{8}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{4}\mathfrak{B}\overset{7}{a}\overset{8}{b}\overset{9}{b}\ldots\overset{n}{b} \\ + {}^{5}\mathfrak{B}\overset{8}{a}\overset{9}{b}\overset{10}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{6}\mathfrak{B}\overset{9}{a}\overset{10}{b}\overset{11}{b}\ldots\overset{n}{b} + {}^{7}\mathfrak{B}\overset{10}{a}\overset{11}{b}\overset{12}{b}\ldots\overset{n}{b} + \ldots\ldots + {}^{n-3}\mathfrak{B}\overset{n}{a}. \end{array}}$$

Anmerkung 1.

Diese letzte Formel gewährt durch ihre Kürze nicht nur eine sehr bequeme Übersicht der Producte, welche der allgemeine n^{te} Theilbruch enthält, indem sie die Anzahl der einzelnen Producte, die, wenn n nur etwas beträchtlich wird, sehr stark anwächst, und sich z. B. beym zehnten Theilbruch schon im Zähler auf 55, und im Nenner auf 89 beläuft, im Zähler nur auf $n - 3$, und im Nenner auf $n - 2$ Hauptproducte reducirt, sondern sie erleichtert auch die Berechnung eines Theilbruchs aufser der Reihe so sehr als möglich. So bequem indessen diese Methode seyn mag; so ist doch die Methode §. 4., die Theilbrüche nacheinander bis zum n^{ten} aufzusuchen, weit kürzer und angenehmer, wie sich ein jeder durch wirkliche Versuche

leicht überzeugen kann. Der Zweck der Aufgabe, den n^{ten} Theilbruch *außer der Reihe* zu finden, ist also gar nicht der, eine leichtere Methode zu seiner Berechnung auszumitteln, denn hiezu bleibt die Methode §. 4. immer die bequemste. Überdem ist auch gerade in den wichtigsten Fällen, wo nämlich die Glieder eines Kettenbruchs in einer unendlichen Reihe fortgehen, durchaus nöthig, die Theilbrüche nicht außer, sondern nach der Reihe aufzusuchen, um zu sehen, wie schnell oder langsam dieselben sich dem wahren Werthe des ganzen Kettenbruchs nähern. Der eigentliche Zweck der gedachten Aufgabe geht vielmehr dahin, dem Geiste der Mathematik gemäß, alle Theilbrüche unter eine einzige allgemeine Formel zu bringen, die in der Analysis vielleicht hie und da zur Auflösung schwieriger Probleme dienen kann. Nun ist in allen Reihen, in welchen jedes folgende Glied durch die vorhergehenden gegeben wird, wenn man die Glieder nach der Reihe durch $\frac{{}^1\mathfrak{A}}{{}^1\mathfrak{B}}, \frac{{}^2\mathfrak{A}}{{}^2\mathfrak{B}}, \frac{{}^3\mathfrak{A}}{{}^3\mathfrak{B}}$ u. s. w. bezeichnet, für jedes n^{te} Glied der kürzeste allgemeine Ausdruck $\frac{{}^n\mathfrak{A}}{{}^n\mathfrak{B}}$, und dieser Ausdruck bekommt für jede besondere Art von Reihe seinen bestimmten Werth, wenn man das Charakteristische angiebt, wodurch sich dieselbe von andern Arten von Reihen unterscheidet. So drückt z. B. $\frac{{}^n\mathfrak{A}}{{}^n\mathfrak{B}}$ das n^{te} Glied in der Reihe §. 19. Z. 1., welche die Zahl der einzelnen Producte im Nenner der nacheinander folgenden Theilbrüche angiebt, bestimmt aus, so bald man anzeigt, daſs hier $\frac{{}^1\mathfrak{A}}{{}^1\mathfrak{B}} = 1$, $\frac{{}^2\mathfrak{A}}{{}^2\mathfrak{B}} = 2$, und nun jedes folgende Glied immer die Summe der beyden nächstvorhergehenden seyn soll. Eben so giebt der Ausdruck $\frac{{}^n\mathfrak{A}}{{}^n\mathfrak{B}}$ den Werth des n^{ten} Theilbruchs bestimmt an, so bald man $\frac{{}^1\mathfrak{A}}{{}^1\mathfrak{B}} = \frac{\overset{1}{a}}{\overset{1}{b}}$, $\frac{{}^2\mathfrak{A}}{{}^2\mathfrak{B}} = \frac{\overset{1}{a}\,\overset{2}{b}}{\overset{1}{b}\,\overset{2}{b} + \overset{2}{a}}$, und nun

$$\frac{{}^3\mathfrak{A}}{{}^3\mathfrak{B}} = \frac{{}^2\mathfrak{A}\,\overset{3}{b} + {}^1\mathfrak{A}\,\overset{3}{a}}{{}^2\mathfrak{B}\,\overset{3}{b} + {}^1\mathfrak{B}\,\overset{3}{a}} \text{ etc., und so überhaupt } \frac{{}^r\mathfrak{A}}{{}^r\mathfrak{B}} = \frac{{}^{r-1}\mathfrak{A}\,\overset{r}{b} + {}^{r-2}\mathfrak{A}\,\overset{r}{a}}{{}^{r-1}\mathfrak{B}\,\overset{r}{b} + {}^{r-2}\mathfrak{B}\,\overset{r}{a}} \text{ setzt.}$$

Dieser Ausdruck zeigt nun zwar nicht, wie der n^{te} Theilbruch *aufser* der Reihe zu berechnen ist, sondern er setzt voraus, dafs man alle vorhergehenden Theilbrüche nach der Reihe kennen mufs, wenn man den n^{ten} wissen will, und giebt zugleich die Methode bestimmt an, wie man jene finden könne. Aber wenn man blofs auf die Kürze des Ausdrucks sieht, fo ist derselbe offenbar der kürzeste unter allen möglichen. Herr Prof. *Hindenburg* hat, um auch diese Aufgabe zur Erweiterung seiner vortrefflichen combinatorischen Analytik zu nutzen, dieselbe combinatorisch behandelt, und daher im ersten und zweyten Hefte seines Archivs mehrere combinatorische Auflösungen derselben mitgetheilt, die theils von ihm selbst, theils von seinen berühmten Schülern, den Herren *Rothe*, *Burkkardt* und *Töpfer* erfunden worden. Unter diesen scheint die Burkhardtsche Auflösung mit der meinigen der Sache nach übereinzukommen, obgleich ich diese gefunden habe, ehe ich von jener noch das mindeste wufste, und zwar auf einem Wege, auf welchem ich auf die Combinationen der gegebenen Zähler und Nenner nicht die geringste Rücksicht nahm. Überhaupt mufste ich hier von der neuen Combinationslehre gänzlich abstrahiren, weil ich auch für Leser schrieb, die mit derselben vielleicht noch nicht gehörig bekannt sind. Daher wählte ich auch nicht die Hindenburgschen Bezeichnungen der Zähler und Nenner, sondern solche, die mir zu *meiner* Absicht die passendsten schienen, weil ich mich an dieselben ohnehin schon längst gewöhnt hatte.

Anmerkung 2.

Da ich die Theorie der Kettenbrüche in ihrer gröfsesten Allgemeinheit dargestellt habe; so wird sich nun aus derselben die Theorie der eigentlich sogenannten *stetigen* Brüche im zweyten Abschnitte desto kürzer ableiten lassen, und eben diese Kürze wird den Vortheil gewähren, die höchst merkwürdigen Eigenschaften derselben desto leichter zu übersehen.

Zweyter Abschnitt.

Von den stetigen Brüchen.

Erklärung 3.

§. 20.

Ein Kettenbruch, in welchem der Zähler eines jeden Gliedes 1, und der Nenner eine beliebige ganze Zahl ist, heifst ein *stetiger Bruch* (Fractio continua)

Z. B. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\ldots}}}}$ oder $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{7+\ldots}}}}$ u. s. w.

Zusatz 1. Also ist in jedem stetigen Bruche der Zähler des n^{ten} Theilbruchs die Summe aus dem Product des Nenners im n^{ten} Gliede in den Zähler des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs und dem Zähler des $(n-2)^{ten}$ Theilbruchs, und sein Nenner ist die Summe aus dem Product des Nenners im n^{ten} Gliede in den Nenner des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs, und dem Nenner des $(n-2)^{ten}$ Theilbruchs (§. 3.).

Zusatz 2. Sind daher die Zähler und Nenner der Glieder alle positiv; so kann man, um die Theilbrüche nach der Reihe zu finden, im Schema §. 4., statt der Glieder selbst, der Kürze wegen, blofs ihre Nenner hinsetzen. Eben dieses kann man auch thun, wenn die Zähler der Glieder, aufser dem ersten, alle negativ sind, nur mufs man in diesem Falle vom Producte aus dem Nenner des n^{ten} Gliedes in den Zähler des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs den Zähler des $(n-2)^{ten}$, und vom Producte aus dem Nenner des n^{ten} Gliedes in den Nenner des $(n-1)^{ten}$ Theilbruchs den Nenner des $(n-2)^{ten}$ *subtrahiren.*

Z. B. In den beyden angeführten stetigen Brüchen kann man kurz also verfahren:

Nenner der Glieder.	Theilbrüche.	Nenner der Glieder.	Theilbrüche.
0	0 : 1	0	0 : 1
2	1 : 2	1	1 : 1
4	4 : 9	3	3 : 2
6	25 : 56	5	14 : 9
8	204 : 457	7	95 : 61

Zusatz 3. Setzt man ${}^{1}\mathfrak{A} = \overset{2}{b}\,\overset{3}{b} + 1$, ${}^{2}\mathfrak{A} = {}^{1}\mathfrak{A}\overset{4}{b} + \overset{2}{b}$, ${}^{3}\mathfrak{A} = {}^{2}\mathfrak{A}\overset{5}{b} + {}^{1}\mathfrak{A}$, ${}^{4}\mathfrak{A} = {}^{3}\mathfrak{A}\overset{6}{b} + {}^{2}\mathfrak{A}$, ${}^{5}\mathfrak{A} = {}^{4}\mathfrak{A}\overset{7}{b} + {}^{3}\mathfrak{A}$ u. s. w., und eben so ${}^{1}\mathfrak{B} = \overset{1}{b}\,\overset{2}{b} + 1$, ${}^{2}\mathfrak{B} = {}^{1}\mathfrak{B}\overset{3}{b} + \overset{1}{b}$, ${}^{3}\mathfrak{B} = {}^{2}\mathfrak{B}\overset{4}{b} + {}^{1}\mathfrak{B}$, ${}^{4}\mathfrak{B} = {}^{3}\mathfrak{B}\overset{5}{b} + {}^{2}\mathfrak{B}$, ${}^{5}\mathfrak{B} = {}^{4}\mathfrak{B}\overset{6}{b} + {}^{3}\mathfrak{B}$ u. s. w.; so ist für jeden stetigen Bruch der n^{te} Theilbruch, ausser der Reihe bestimmt (§. 19. Z. 7.), dieser:

$$\frac{{}^{2}\mathfrak{A}\overset{5}{b}\overset{6}{b}..\overset{n}{b} + {}^{1}\mathfrak{A}\overset{6}{b}\overset{7}{b}..\overset{n}{b} + {}^{2}\mathfrak{A}\overset{7}{b}\overset{8}{b}..\overset{n}{b} + {}^{3}\mathfrak{A}\overset{8}{b}\overset{9}{b}..\overset{n}{b} + {}^{4}\mathfrak{A}\overset{9}{b}\overset{10}{b}..\overset{n}{b} + {}^{5}\mathfrak{A}\overset{10}{b}\overset{11}{b}..\overset{n}{b} + \ldots + {}^{n-4}\mathfrak{A}}{{}^{2}\mathfrak{B}\overset{4}{b}\overset{5}{b}..\overset{n}{b} + {}^{1}\mathfrak{B}\overset{5}{b}\overset{6}{b}..\overset{n}{b} + {}^{2}\mathfrak{B}\overset{6}{b}\overset{7}{b}..\overset{n}{b} + {}^{3}\mathfrak{B}\overset{7}{b}\overset{8}{b}..\overset{n}{b} + {}^{4}\mathfrak{B}\overset{8}{b}\overset{9}{b}..\overset{n}{b} + {}^{5}\mathfrak{B}\overset{9}{b}\overset{10}{b}..\overset{n}{b} + {}^{6}\mathfrak{B}\overset{10}{b}\overset{11}{b}..\overset{n}{b} + \ldots\ldots + {}^{n-3}\mathfrak{B}}.$$

Zusatz 4. Wenn man in zwey nächsten Theilbrüchen $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ eines stetigen Bruchs den Zähler eines jeden durch den Nenner des andern multiplicirt; so ist die Differenz der beyden Producte allemal $= 1$, nämlich entweder $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$, oder $\gamma\beta - \alpha\delta = 1$ (§. 5. Z. 1.).

Zusatz 5. Die Differenz zweyer nächsten Theilbrüche $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ ist in jedem stetigen Bruche der Bruch $\frac{1}{\beta\delta}$, welcher 1 zum Zähler, und das Product ihrer beyden Nenner zum Nenner hat (§. 5. Z. 2.).

Zusatz 6. Wenn daher in einem stetigen Bruche die Nenner der Theilbrüche immer grösser werden; so wird das Zu- oder Abnehmen

der Theilbrüche selbst immer geringer (Z. 5.). Also müssen in diesem Falle die Theilbrüche sich bald dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs, der dem letzten Theilbruche gleich ist, sehr merklich nähern.

Zusatz 7. In einem stetigen Bruche ist für den Zähler und Nenner eines jeden Theilbruchs ihr gröſsester gemeinschaftlicher Theiler allemal 1 (§. 5. Z. 3.).

Zusatz 8. Also ist jeder Theilbruch eines stetigen Bruchs schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt, und sein Zähler und Nenner sind daher Primzahlen unter sich (Z. 7.).

Zusatz 9. Jeder Bruch, der gröſser ist, als der kleinere von zwey nächsten Theilbrüchen eines stetigen Bruchs, aber kleiner, als der gröſsere von ihnen, besteht aus gröſsern Zahlen, als jeder von diesen (§. 6.).

Zusatz 10. Also ist zwischen zwey nächsten Theilbrüchen eines stetigen Bruchs kein Bruch aus *kleinern* Zahlen möglich, der von einem Zwischenwerthe, d. i. gröſser, als der kleinere, aber kleiner, als der gröſsere von ihnen wäre (Zus. 9.). *)

*) Diese merkwürdige Eigenschaft aller *stetigen* Brüche ist der Grund, warum sie diesen Namen mit Recht verdienen. Denn an sich ist zwar jede Zahl eine unstetige Gröſse, weil ihre Theile gar nicht erst als zusammenhängend betrachtet werden dürfen, um sich von ihr eine Vorstellung zu machen. Indessen läſst sich doch die *Folge* gewisser Zahlen auf einander als stetig denken, in so fern zwischen zwey nächsten von ihnen keine Lücke, d. i. keine Zahl von einem Zwischenwerthe statt findet. In dieser Rücksicht ist die natürliche Folge der ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 etc. stetig, in sofern nämlich zwischen zwey nächsten von ihnen keine andere ganze Zahl von einem Zwischenwerthe möglich ist, mithin ihre Folge ununterbrochen fortgeht. Ordnet man daher die Folge der Brüche so, daſs entweder Zähler und Nenner zugleich, oder wenigstens die Nenner beständig wachsen sollen; so ist in eben der Rücksicht ihre Folge als stetig zu betrachten, in sofern es zwischen zwey nächsten Brüchen von der Art nie einen Bruch von einem Zwischenwerthe aus kleinern Zahlen giebt. Von dieser Art ist, wie von selbst erhellt, die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. und überhaupt aller derjenigen, deren Zähler und Nenner in der Ordnung der ganzen Zahlen auf einander folgen, z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ etc.

Zusatz 11. Wenn in einem stetigen Bruch die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind; so ist

1) Jeder gerade Theilbruch kleiner, jeder ungerade hingegen gröſser, als der nächstvorhergehende und nächstfolgende (§. 7. Z. 1.).

2) Die ungeraden Theilbrüche werden immer kleiner, die geraden hingegen immer gröſser (§. 8. Z. 1.).

3) Der letzte Theilbruch, welcher den Werth des ganzen stetigen Bruchs giebt, ist kleiner, als jeder vorhergehende ungerade, aber gröſser, als jeder vorhergehende gerade (§. 8. Z. 2.).

4) Die Differenz zwischen dem letzten Theilbruch und jedem andern $\frac{\gamma}{\delta}$ ist allemal kleiner, als der Stammbruch $\frac{1}{\beta\delta}$, dessen Nenner das Product aus dem Nenner δ des Bruchs $\frac{\gamma}{\delta}$, in den Nenner β des nächstvorhergehenden $\frac{\alpha}{\beta}$ ist (§. 9. Z.)

5) Wenn der Nenner des zweyten Gliedes gröſser als 1 ist; so werden die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer gröſser.

6) Die Nenner der Theilbrüche aber werden in jedem Falle überhaupt immer gröſser (§. 20. Z. 2.).

7) Also kommen die Theilbrüche dem Werthe des letztern immer näher (No. 4.).

Zusatz 12. Wenn hingegen die Zähler der Glieder, auſser dem ersten, alle negativ sind; so nehmen *erstlich*, wenn auſser dem ersten Nenner, der auch 1 seyn kann, alle übrigen Nenner gröſser als 1 sind,

Von Brüchen hingegen, deren Zähler und Nenner nicht stetig wachsen, würde es schwer seyn, eine solche stetige Folge anzugeben. Allein diesen wichtigen Vortheil verschaffen uns eben die stetigen Brüche, indem ihre Theilbrüche alle von der Art sind, daſs zwischen jeden zwey nächsten von ihnen kein Bruch von einem Zwischenwerthe möglich ist, der aus kleinern Zahlen bestünde, und daher eine Reihe von Brüchen mit beständig wachsenden Zählern und Nennern darstellen, deren Werthe so nahe aneinander gränzen, daſs sich kein Bruch von einem Zwischenwerthe zwischen sie einschieben läſst.

die Theilbrüche immer zu, und der letzte ist also gröſser, als jeder vorhergehende (§. 12. Z.), wenn *zweytens* der erste Nenner wenigstens 2, alle übrigen aber gröſser als 2 sind, so ist die Differenz zwischen jedem n^{ten} Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ und dem letzten allemal kleiner, als der Stammbruch $\frac{1}{\delta(\delta-\beta)}$, dessen Nenner das Product aus dem Nenner δ des n^{ten} Theilbruchs in die Differenz zwischen ihm und dem Nenner β des $(n-1)^{ten}$ ist (§. 13.), ferner ist alsdenn in jedem Theilbruche der Zähler kleiner, als der Nenner, und die Nenner der Theilbrüche nehmen stärker zu, als ihre Zähler, und wenn *drittens* auſser dem ersten Nenner, welcher auch 1 seyn kann, alle übrigen Nenner gröſser als 2 sind; so nehmen die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer zu (§. 10. Z.).

Lehrsatz 14.

§. 21. Wenn in einem stetigen Bruche die Zähler und Nenner aller Glieder positiv sind; so ist jeder Theilbruch desselben $\frac{\gamma}{\delta}$ so beschaffen, daſs kein Bruch aus kleinern Zahlen möglich ist, der dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs eben so nahe, oder noch näher käme, als er.

Beweis. Denn da jeder Theilbruch schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist (§. 20. Z. 8.); so giebt es *erstlich* keinen Bruch aus kleinern Zahlen, der ihm gleich wäre, und daher dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs eben so nahe käme, als er. Nun ist ferner von zwey nächsten Theilbrüchen $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ allemal der eine ein ungerader, und der andere ein gerader, mithin der eine gröſser und der andere kleiner, als der ganze stetige Bruch (§. 20. Z. 11. No. 3.). Soll also ein Bruch möglich seyn, der dem Werthe des letztern näher kommt, als der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$, so muſs sein Werth zwischen die

Werthe von $\frac{\gamma}{\delta}$, und $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ fallen. Allein bey einem Bruche, der aus kleinern Zahlen besteht, als einer von diesen, ist dieses unmöglich (§. 20. Z. 10.). Also ist auch *zweytens* kein Bruch aus kleinern Zahlen möglich, der dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs näher käme, als der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$.

Zusatz 1. Eben dieser Satz gilt auch für jeden stetigen Bruch, dessen Theilbrüche immer zunehmen, wofern zugleich die Zähler und Nenner derselben immer gröſser werden.

Denn da jeder Theilbruch schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist (§. 20. Z. 8.); so kann *erstlich* kein Bruch aus kleinern Zahlen dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs gleich nahe kommen. Nun nehmen ferner die Theilbrüche immer zu (p. hyp.), folglich ist der letzte der gröſseste von allen. Soll also ein Bruch aus kleinern Zahlen als der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ dem Werthe des letztern näher kommen, als $\frac{\gamma}{\delta}$, so muſs sein Werth zwischen $\frac{\gamma}{\delta}$ und zwischen dem Werth des letzten Theilbruchs fallen. Nun aber kann er keinen von den nach $\frac{\gamma}{\delta}$ folgenden Theilbrüchen selbst gleich seyn, weil jeder von diesen schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, mithin muſs sein Werth zwischen die Werthe irgend zweyer nächsten von diesen Theilbrüchen fallen. Nun aber kann derselbe nicht zwischen den Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ und den nächstfolgenden $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ fallen (§. 20. Z. 10.), eben so wenig aber auch zwischen $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ und den nächstfolgenden $\frac{\eta}{\theta}$, denn sonst müſste er aus gröſsern Zahlen bestehen, als der Theilbruch $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ (§. 20. Z. 9), folglich auch, da die Zähler und Nenner der Theilbrüche immer gröſser werden (p. hyp.), um so mehr aus gröſsern Zahlen, als $\frac{\gamma}{\delta}$.

Da nun dieser Grund auch von jedem Paar der folgenden zwey nächsten Theilbrüche gilt; so kann der Werth des gedachten Bruchs zwischen kein nächstes Paar von allen den Theilbrüchen fallen, die zwischen dem Theilbruche $\frac{\gamma}{\delta}$ und dem letzten befindlich sind. Also ist auch kein Bruch aus kleinern Zahlen möglich, der dem Werthe des ganzen stetigen Bruchs näher käme, als der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$.

Zusatz 2. Also gilt dieser Satz auch für jeden stetigen Bruch, in welchem die Zähler der Glieder, aufser dem ersten, alle negativ, und die Nenner, aufser dem ersten, der auch 1 seyn kann, alle gröfser, als 2 sind.

Denn hier nehmen die Theilbrüche immer zu (§. 20. Z. 12. No. 1.), und ihre Zähler und Nenner werden gleichfalls immer gröfser (§. 20. Z. 12. No. 3.). Also ist der Satz richtig (Z. 1.).

Aufgabe 5.

§. 21. Einen ordentlichen ächten Bruch $\frac{A}{B}$, oder unächten $\frac{B}{A}$, in welchem A ein aliquanter Theil von B ist, in einen stetigen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandele den ächten Bruch $\frac{A}{B}$ in einen Kettenbruch (§. 18.), so, dafs

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \dots}}}}$$

wird; so ist, da die Nenner C, D, E, F etc. lauter ganze Zahlen sind, derselbe ein stetiger Bruch (§. 20.), und eben ein solcher ist also auch der unächte Kettenbruch

$$\frac{B}{A} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \dots}}}}} \quad (\text{§. } 18.).$$

Aufgabe 6.

§. 23. Von zwey Zahlen a, b, die Primzahlen unter sich sind, und von denen $a<b$ ist, zwey Vielfache zu finden, die von einander um 1 unterschieden sind.

Auflösung. Man verwandele den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen stetigen Bruch (§. 22.), suche alle seine Theilbrüche (§. 20. Z. 2.), und multiplicire a durch den Nenner, und b durch den Zähler des vorletzten Theilbruchs $\frac{m}{n}$; so sind die Producte na, mb die verlangten Vielfachen von a, b, und na ist gröſser, oder kleiner als mb, nachdem der letzte Theilbruch ein ungerader, oder ein gerader ist.

Beweis. Denn da der letzte Theilbruch $=\frac{a}{b}$ (§. 2. Z. 1.), und $\frac{a}{b}$ schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist (p. hyp.): so ist der letzte Theilbruch der Bruch $\frac{a}{b}$ selbst. Da nun der vorletzte der Bruch $\frac{m}{n}$ ist (p. hyp.); so ist die Differenz der Producte na, $mb=1$ (§. 20. Z. 4.). Ist nun ferner der letzte Theilbruch ein ungerader; so ist $\frac{a}{b}>\frac{m}{n}$ (§. 20. Z. 11. No. 3.), folglich $na>mb$. Ist hingegen der letzte Theilbruch ein gerader; so ist $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}$, also $na<mb$.

Z. B. Die Zahlen 421, 972 sind Primzahlen unter sich, und

$$\frac{421}{972}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}} \text{ (§. 18.)},$$

folglich sind die sechs Theilbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{68}{157}$, $\frac{421}{972}$. Nun ist $421 \cdot 157=66097$, und $68 \cdot 972=66096$, also die Differenz der beyden Vielfachen $=1$.

Aufgabe 7.

§. 24. Für einen gegebenen ächten Bruch $\frac{A}{B}$, oder unächten $\frac{B}{A}$, in welchem A ein aliquanter Theil von B ist, alle diejenigen Brüche zu finden, die seinem Werthe immer näher kommen, und von denen zugleich ein jeder so beschaffen ist, daſs es keinen Bruch aus kleinern Zahlen giebt, der dem Werthe von $\frac{A}{B}$, oder $\frac{B}{A}$ eben so nahe, oder noch näher käme.

Auflösung. Man verwandele den ächten Bruch $\frac{A}{B}$ in einen stetigen Bruch (§. 22.), und suche alle seine Theilbrüche (§. 20. Z. 2.); so sind diese die verlangten Brüche für den ächten Bruch $\frac{A}{B}$ (§. 20. Z. 11. No. 7. und §. 21,), und eben diese Theilbrüche umgekehrt genommen sind die verlangten Brüche für den umgekehrten unächten Bruch $\frac{B}{A}$ (§. 16. Z. 2.).

Z. B. Für $\frac{421}{972}$ sind die verlangten Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{68}{157}$, und für $\frac{972}{421}$, sind es diese: $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{30}{13}$, $\frac{157}{68}$, nur mit dem Unterschiede, daſs von den Theilbrüchen für den ächten Bruch $\frac{A}{B}$ jeder ungerade gröſser, und jeder gerade kleiner, als $\frac{A}{B}$ (§. 20. Z. 11. No. 3.), für den unächten $\frac{B}{A}$ hingegen jeder ungerade kleiner, jeder gerade aber gröſser, als $\frac{B}{A}$ ist.

Zusatz 1. Will man daher die Brüche von der gedachten Art für einen Decimalbruch von einer bestimmten Anzahl Decimalziffern; so nehme man denselben als eine ganze Zahl betrachtet, zum Zähler

eines ordentlichen Bruchs an, dessen Nenner eine Eins mit so viel Nullen ist, als der Decimalbruch Decimalziffern enthält, und verfahre alsdenn auf die eben angezeigte Art.

Zusatz 2. Verlangt man aber die Brüche von der gedachten Art für einen Decimalbruch von einer *unbestimmten* Menge Decimalziffern; so nehme man ihn bis zu einer beliebigen *bestimmten* Anzahl Decimalziffern, und suche für ihn, wie Zus. 1. die Brüche von der verlangten Art.

Ist nun der gegebene unbestimmte Decimalbruch ein *ächter*; so ist von den ächten Theilbrüchen jeder ungerade gröſser, als der angenommene bestimmte Decimalbruch (§. 20. Z. 11. No. 3.), also um so mehr gröſser, als der gegebene unbestimmte, jeder gerade Theilbruch hingegen ist kleiner, als der angenommene bestimmte (§. 20. Z. 11. No. 3.), ob er aber auch noch kleiner sey, als der gegebene unbestimmte, bleibt noch unentschieden, und kann nur dadurch ausgemittelt werden, daſs man ihn in einen Decimalbruch verwandelt, und ihn mit dem gegebenen vergleicht. Findet sich nun, daſs er auch kleiner ist, als der gegebene unbestimmte; so ist kein Bruch möglich, der dem Werthe des letztern näher käme, als der nächstfolgende ungerade, und dabey aus kleinern Zahlen bestünde, als dieser. Denn ein solcher Bruch müſste kleiner seyn, als dieser ungerade Theilbruch, und gröſser als der nächstvorhergehende gerade, also könnte er nicht aus kleinern Zahlen bestehen, als einer von ihnen (§. 20. Z. 10.).

Ist hingegen der gegebene unbestimmte Decimalbruch ein *unächter*; so ist von den umgekehrten unächten Theilbrüchen jeder ungerade kleiner, als der angenommene bestimmte Decimalbruch (§. 20. Z. 11. No. 3.), also um so mehr kleiner, als der gegebene unächte unbestimmte, jeder gerade hingegen gröſser, als der bestimmte (§. 20. Z. 11. No. 3.), ob er auch noch gröſser, als der gegebene unbestimmte, oder schon kleiner, als dieser sey, bleibt unentschieden, und muſs gleichfalls erst durch die Verwandelung desselben in einen Decimalbruch ausgemittelt werden. Findet sich nun, daſs er wirklich auch gröſser ist, als der gegebene unbestimmte Decimalbruch; so ist eben so, wie vorhin, klar, daſs kein Bruch möglich ist, der dem Werthe desselben näher käme, als der nächstfolgende ungerade, und dabey aus kleinern Zahlen bestünde, als dieser.

Anmerkung.

Wenn man daher wissen will, aus was für grofsen Zahlen derjenige Bruch am wenigsten bestehen müfste, der einem gegebenen Decimalbruche von einer unbestimmten Menge Decimalziffern völlig gleich wäre; so ist hiebey folgendes zu merken:

1) Man erreicht diesen Zweck desto vollkommener, je mehrere Decimalziffern man für den bestimmten Bruch annimmt, den man in einen stetigen Bruch verwandeln will.

2) Bey dieser Verwandelung darf man nur einige wenige Quotienten mehr, als die Zahl der angenommenen Decimalziffern beträgt, zu Gliedern des stetigen Bruchs nehmen, weil sich leicht übersehen läfst, dafs die übrigen ganz unnütz und unbrauchbar seyn würden, indem die Theilbrüche, die sie geben, sich zwar dem Werthe des bestimmten Decimalbruchs immer mehr nähern, und ihn endlich völlig erreichen, vom wahren Werthe des gegebenen unbestimmten hingegen sich immer mehr entfernen würden.

3. So lange die Ordnungszahl eines geraden Theilbruchs noch um 3 kleiner ist, als die Zahl der angenommenen Decimalziffern, kann man ziemlich sicher seyn, dafs er, sammt allen vorhergehenden geraden Theilbrüchen, als ein ächter, noch kleiner, als ein unächter aber noch gröfser sey, als der gegebene unbestimmte ächte, oder unächte. Man darf also den Versuch, diesen Umstand erst durch die Verwandelung eines geraden Theilbruchs in einen Decimalbruch auszumitteln, nicht eher als mit demjenigen geraden Theilbruch machen, dessen Ordnungszahl um 2 oder 3 kleiner ist, als die Anzahl der angenommenen Decimalziffern.

Um dieses alles durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir untersuchen, aus wie vielen Ziffern der Zähler und Nenner desjenigen Bruchs zum wenigsten bestehen müfste, der der sogenannten Zahl π völlig gleich wäre, d. i. derjenigen Zahl, die das Verhältnifs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser angiebt. Diese Zahl ist ein unächter Decimalbruch von einer unbestimmten Menge Decimalziffern, von welchen man bereits 200 genau kennt, nämlich folgender:

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419 7\ldots$

Nimmt man diesen bis zur 32sten Decimalziffer 0, und verwandelt ihn in einen ordentlichen Bruch $\frac{314159\ldots\ldots50}{100000\ldots\ldots00}$; so bekommt man, wenn man mit diesem so verfährt, als ob man den gröfsesten gemeinschaftlichen Theiler des Zählers und Nenners suchte, folgende Quotienten: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 1, 4, 15, 1, u. s. w.

Setzt man also diese Quotienten nach der Reihe unter einander, so lassen sich aus ihnen als Nennern der Stammbrüche eines stetigen Bruchs nach §. 20. Z. 2. alle Theilbrüche auf folgende Art, ohne grofse Mühe finden:

Quotienten.	Aechte Theilbrüche.
3	1 : 3
7	7 : 22
15	106 : 333
1	113 : 355
292	33102 : 103993
1	33215 : 104348
1	66317 : 208341
1	99532 : 312619
2	265381 : 833719
1	364913 : 1146408
3	1360120 : 4272943
1	1725033 : 5419351
14	25510582 : 80143857
2	52746197 : 165707065
1	78256779 : 245850922
1	131002976 : 411557987
2	340262731 : 1068966896
2	811528438 : 2549491779
2	1963319607 : 6167950454
2	4738167652 : 14885392687
1	6701487259 : 21053343141
84	567663097408 : 1783366216531
2	1142027682075 : 3587785776203
1	1709690779483 : 5371151992734
1	2851718461558 : 8958937768937
15	44485467702853 : 139755218526789
3	136308121570117 : 428224593349304
13	1816491048114374 : 5706674932067741
1	1952799169684491 : 6134899525417045
4	9627687726852338 : 30246273033735921
1	11580486896536829 : 36381172559152966
4	55949633531299654 : 175770963270347785
	u. s. w.

Alle diese Theilbrüche, den letzten 32^{sten} ausgenommen, nähern sich, wenn man sie umkehrt, und in unächte Brüche verwandelt, nach der Reihe dem wahren Werthe der Zahl π als des gegebenen Decimalbruchs immer mehr, und es ist kein Bruch, von einem kleinern Zähler und Nenner möglich, der diesem Werthe eben so nahe käme. Wenn man den 30^{sten} von ihnen umgekehrt genommen, nämlich: 30246.... : 9627.... in einen Decimalbruch verwandelt; so findet man, daſs er die Zahl π bis auf die sogenannte *Ludolphsche* Zahl, d. i. bis auf die 32^{ste} Decimalziffer 0 genau angiebt, statt der 33^{sten} 2 aber schon 7 giebt, mithin noch gröſser, als die gegebene Zahl π ist. Sollte also ein Bruch möglich seyn, der die Zahl π genau, oder auch nur genauer angäbe, als der vorletzte 31^{ste} Theilbruch $\frac{3\,6\,3\,8\,1\,1\,7\,2\,2\,5\,5\,9\,1\,5\,2\,9\,6\,6}{1\,1\,5\,8\,0\,4\,8\,6\,8\,9\,6\,5\,3\,6\,8\,2\,9}$; so müſste sein Zähler und Nenner schon gröſser seyn, als der Zähler und Nenner in diesem.

Der letzte 32^{ste} Theilbruch wird schon kleiner, als die Zahl π, also ist dieser, nebst den folgenden, hier schon unbrauchbar, indem sie sich zwar dem Werthe des angenommenen Decimalbruchs immer mehr nähern, aber vom Werth der Zahl π immer mehr entfernen.

Lambert hat bereits in seinen *Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, zweyter Theil, erster Abschnitt*, 1770. S. 156. 157. Die *Ludolphsche* Zahl von 32 Decimalziffern in einen stetigen Bruch verwandelt, aber denselben nur bis auf 27 Theilbrüche berechnet. Die 25 ersten sind ganz richtig, und stimmen mit den meinigen völlig überein. Die beyden letzten aber sind unrichtig, weil der 26^{ste} Quotient = 37 angenommen worden, da doch derselbe nur = 15 ist.

Hieraus erhellt also die traurige Täuschung der sogenannten Cirkelquadrirer, die aus gänzlicher Unkunde der Sache in dem Wahn standen, und zum Theil noch immer stehen, als ob sie sich um die praktische Geometrie unendlich verdient machen würden, wenn es ihnen gelänge, das Verhältniſs der Kreislinie zum Durchmesser durch einen bestimmten Bruch ganz genau anzugeben. Denn gesetzt, ein

solcher Bruch wäre in der That möglich; so müfste gleichwohl offenbar sein Zähler und Nenner aus einer so grofsen Menge Ziffern bestehen, dafs wohl niemanden je die Lust ankommen würde, denselben zur Berechnung der Peripherie des Kreises zu gebrauchen, da schon der *Ludolphsche* Decimalbruch hiezu weit bequemer ist, und eine geringe Anzahl Decimalziffern die Kreislinien so genau angiebt, als man es *in praxi* irgend nöthig hat. Für die *Theorie* würde es indessen allerdings angenehm seyn, wenn es für die Zahl π einen solchen genauen bestimmten Bruch gäbe. Allein da derselbe, wie gezeigt, aus so ungemein grofsen Zahlen bestehen müfste, wofern er in der That möglich wäre; so ist klar, dafs es keinen andern Köpfen, als solchen, die in der Mathematik höchst unwissend sind, einfallen kann, diesen Bruch aufzusuchen. Das traurigste aber ist, dafs diese ihre Zeit und Kräfte auf eine Sache verwenden, die sogar *an sich unmöglich* ist. Denn das Verhältnifs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser ist wirklich *irrational*, und eine Zahl, die dasselbe genau ausdrückte, ist also eben so widersprechend, als eine solche, die das Verhältnifs der Diagonallinie zur Seite des Quadrats angäbe. Indessen war es unangenehm, dafs es diesem Satze noch immer an einem bündigen Beweise fehlte, und daher seine Richtigkeit im Grunde noch immer ungewifs blieb. Denn den *Sturmschen* Beweis erkannte man schon bald für unzureichend, und obgleich der *Lambertsche* die Sache aufser allen Zweifel zu setzen schien; so ist derselbe doch eben so wenig zureichend, und die Behauptung der Irrationalität der Kreislinie hat sich daher bis jetzt noch durch keinen gründlichen Beweis rechtfertigen können. Nunmehr aber ist ihre Richtigkeit völlig entschieden, indem die allgemeinere Bearbeitung der Lehre von den Kettenbrüchen mich in den Stand gesetzt, durch die nöthige Ergänzung des Lambertschen Verfahrens, diesen äufserst schwierigen Beweis mit aller möglichen Strenge zu liefern, wie die folgende Abhandlung zeigen wird.

V.

Beweis,

dafs das

Verhältnifs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser

irrational ist.

Lehrsatz 1.

§. 1.

Wenn der Halbmesser des Kreises $= 1$ ist; so ist

$$\text{tang.}\, v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \cfrac{1}{11:v - \ldots}}}}}}$$

Beweis. Denn $\text{tang.}\, v = \frac{\sin.\, v}{\cos.\, v}$. Nun ist

$$\sin.\, v = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{2.3 \ldots 8.9} - \frac{v^{11}}{2.3 \ldots 10.11} + - \ldots$$

$$\cos.\, v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6} + \frac{v^8}{2.3.4 \ldots 7.8} - \frac{v^{10}}{2.3 \ldots 9.10} + - \ldots$$

Man verwandele also tang. v in einen Kettenbruch, nämlich man dividire cos. v durch sin. v, verfahre dabey völlig so, als wenn man den gröſsesten gemeinschaftlichen Theiler von sin. v und cos. v suchte, und bemerke nach der Reihe die Quotienten, wie folgt:

$$\cos.\, v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3\,4.5.6} + \frac{v^8}{2.3 \ldots 7.8} - \frac{v^{10}}{2.3 \ldots 9.10} + - \ldots$$

$$\qquad = \frac{1}{v}$$

$$\sin.\, v = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{2.3 \ldots 8.9} - \frac{v^{11}}{2.3 \ldots 10.11} + - \ldots$$

$$\qquad = -\frac{3}{v}$$

$$1^{\text{ter}}\ \text{Rest} = -\frac{v^2}{3} + \frac{v^4}{2.3.5} - \frac{v^6}{2.3.4.5.7} + \frac{v^8}{2.3 \ldots 7.9} - \frac{v^{10}}{2.3 \ldots 9.11} + - \ldots$$

$$\qquad = +\frac{5}{v}$$

$$2^{\text{ter}}\ \text{Rest} = -\frac{v^3}{3.5} + \frac{v^5}{2.3.5.7} - \frac{v^7}{2.3.4.5.7.9} + \frac{v^9}{2.3.4.5.6.7.9.11} - + \ldots$$

$$2^{\text{ter}}\text{Rest} = -\frac{v^3}{3.5} + \frac{v^5}{2.3.5.7} - \frac{v^7}{2.3.4.5.7.9} + \frac{v^9}{2.3.4.5.6.7.9.11} - + \ldots$$

$$= -\frac{7}{v}$$

$$3^{\text{ter}}\text{Rest} = +\frac{v^4}{3.5.7} - \frac{v^6}{2.3.5.7.9} + \frac{v^8}{2.3.4.5.7.9.11} - \frac{v^{10}}{2.3.4.5.6.7.9.11.13} + - \ldots$$

$$= +\frac{9}{v}$$

$$4^{\text{ter}}\text{Rest} = +\frac{v^5}{3.5.7.9} - \frac{v^7}{2.3.5.7.9.11} + \frac{v^9}{2.3.4.5.7.9.11.13} - \frac{v^{11}}{2.3.4.5.6.7.9.11.13.15} + - \ldots$$

$$= -\frac{11}{v}$$

$$5^{\text{ter}}\text{Rest} = -\frac{v^6}{3.5.7.9.11} + \frac{v^8}{2.3.5.7.9.11.13} - \frac{v^{10}}{2.3.4.5.7.9.11.13.15} + - \ldots$$

etc. etc.

Da nun die gefundenen Quotienten $\frac{1}{v}$, $-\frac{3}{v}$, $\frac{5}{v}$, $-\frac{7}{v}$, $\frac{9}{v}$, $-\frac{11}{v}$ etc. sind, und von selbst klar ist, daſs die Division sich ohne Ende fortsetzen läſst, und die folgenden Quotienten $\frac{13}{v}$, $-\frac{15}{v}$, $\frac{17}{v}$, $-\frac{19}{v}$, $\frac{21}{v}$, $-\frac{23}{v}$ etc. seyn müssen, so daſs die Zeichen + und — vor ihnen beständig abwechseln, und die Zähler nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen; so ist

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{(1:v) + \cfrac{1}{-(3:v) + \cfrac{1}{(5:v) + \cfrac{1}{-(7:v) + \cfrac{1}{(9:v) + \cfrac{1}{-(11:v) + \ldots}}}}}} \quad \text{(IV. §. 18.)},$$

$$\text{also tang. } v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \cfrac{1}{11:v - \ldots}}}}}} \quad \text{(IV. §. 14. Z).}$$

Zusatz 1. Also enthält nach IV. §. 4. der Kettenbruch für tang. v folgende Theilbrüche:

0	$0:1$
$-\frac{1}{1:v}$	$1:\frac{1}{v}=v$
$-\frac{1}{3:v}$	$\frac{3}{v}:\left(\frac{3}{v^2}-1\right)=\frac{3v}{3-v^2}$
$-\frac{1}{5:v}$	$\frac{15}{v^2}-1:\left(\frac{15}{v^3}-\frac{6}{v}\right)=\frac{15v-v^3}{15-6v^2}$
$-\frac{1}{7:v}$	$\frac{105}{v^3}-\frac{10}{v}:\left(\frac{105}{v^4}-\frac{45}{v^2}+1\right)=\frac{105v-10v_3}{105-45v^2+v^4}$
$-\frac{1}{9:v}$	$\frac{945}{v^4}-\frac{105}{v^2}+1:\left(\frac{945}{v^5}-\frac{420}{v^3}+\frac{15}{v}\right)=\frac{945v-105v^3+v^4}{945-420v^2+15v^4}$
$-\frac{1}{11:v}$	$\frac{10395}{v^5}-\frac{1260}{v^3}+\frac{21}{v}:\left(\frac{10394}{v^6}-\frac{4725}{v^4}+\frac{210}{v^2}-1\right)$ $=\frac{10395v-1260v^3+21v^5}{10395-4725v^2+210v^4-v^6}$

u. s. w.

Zusatz 2. Wenn der Halbmesser $=1$ ist; so ist der Bogen von

$1^\circ = 0,\ 0174532925199 43\ldots$

$1' = 0,\ 000290888208665\ldots$

$1'' = 0,\ 000004848136811\ldots$

Also läſst sich die Tangente der Bogen aus den Theilbrüchen Z. 1. immer genauer finden. Z. B. Für die Tangente von 1° ist

$$\frac{3v}{3-v^2}=\frac{0,\ 052359877}{2,\ 999695392}=0,\ 01745506\ldots$$ Also erhält man tang. 1° schon durch den zweyten Theilbruch auf mehr als 7 Decimalziffern.

Zusatz 3. Wenn der Bogen ein *aliquoter* Theil des Halbmessers, d. i. wenn $v=\frac{1}{n}$ und n eine ganze Zahl ist; so ist seine Tangente ein *stetiger* Bruch (IV. §. 20.), nämlich:

$$\text{tang.}\ \frac{1}{n} = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \ldots}}}}}}$$

und enthält also (Zus. 1.) folgende Theilbrüche:

$$\frac{1}{n},\ \frac{3n}{3n^2-1},\ \frac{15n^2-1}{15n^3-6n},\ \frac{105n^3-10n}{105n^4-45n^2+1},\ \frac{945n^4-105n^2+1}{945n^5-420n^3+15n}$$

$$\frac{10395n^5-1260n^3+21n}{10395n^6-4725n^4+210n^2-1},\ \frac{135135n^6-17325n^4+378n^2-1}{135135n^7-62370n^5+3150n^3-28n},$$

$$\frac{2027025n^7-270270n^5+5930n^3-36n}{2027025n^8-945945n^6+51975n^4-750n^2+1}\ \text{u. s. w.}$$

Um nun zu sehen, wie stark diese Brüche convergiren, wollen wir einige Beyspiele anführen.

Für den Bogen, der dem Halbmesser gleich, d. i. wo $n = 1$, wird die Tangente durch folgende Theilbrüche bestimmt:

$$1 = 1$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{14}{9} = 1{,}5555\ldots$$

$$\frac{95}{61} = 1{,}55737\ldots$$

$$\frac{841}{540} = 1{,}55740740\ldots$$

$$\frac{9156}{5879} = 1{,}5574077224\ldots$$

$$\frac{118187}{75887} = 1{,}5574077246\ldots$$

Da nun der Bogen, der dem Halbmesser gleich ist, 57° 17′ 44″ etc. beträgt; so sieht man, dafs in der Gegend der Bogen von 57° der sechste Theilbruch erfordert wird, um die Tangenten auf 7 oder 8 Decimalziffern zu erhalten.

Setzt man $n = 2$; so ist

der vierte Theilbruch $\frac{820}{1501} = 0,5463024 6\ldots$

der fünfte - - - $\frac{14701}{26910} = 0,5463024897 8\ldots$

der sechste - - - $\frac{322602}{590519} = 0,5463024898 4\ldots$

Also giebt in der Gegend der Bogen von 28° schon der vierte, oder fünfte Theilbruch die Tangenten auf 7 oder 8 Decimalziffern.

Ist $n = 10$; so ist

der zweyte Theilbruch $\frac{30}{299} = 0,1003346720 21\ldots$

der dritte - - - $\frac{104900}{1045501} = 0,1003346720 854403\ldots$

Also giebt in der Gegend der Bogen von 5° und 6° schon der zweyte Theilbruch die Tangenten auf 9 oder 10 Decimalziffern.

Ist $n = 100$; so ist

der zweyte Theilbruch $\frac{300}{29999} = 0,0100003333 44\ldots$

der dritte - - - $\frac{149999}{14999440} = 0,0100003333 4666720\ldots$

der vierte - - $\frac{104999000}{10499550001} = 0,0100003333 4666720637 10\ldots$

Also giebt in der Gegend der Bogen von 34′ und 35′ der zweyte Theilbruch die Tangenten schon auf 10 bis 11, und der dritte schon auf 16 bis 17 Decimalziffern.

Ist $n = 1000$; so ist

der zweyte Theilbruch $\frac{3000}{2999999} = 0,0010000003333334448\ldots$

der dritte - - - $\frac{14999999}{14999994000} = 0,0010000003333334666667206 6\ldots$

Also giebt in der Gegend der Bogen von 3′ der zweyte Theilbruch die Tangenten schon auf 15 bis 16 Decimalziffern.

Die Beyspiele zeigen schon hinreichend, daſs die angeführten Theilbrüche eine sehr bequeme Methode verschaffen, die Tangenten

der Bogen, unabhängig von ihren Sinussen, unmittelbar zu finden. Wäre es üblich, statt der bisherigen Eintheilung in Nonagesimal- und Sexagesimaltheile, oder statt der neuen französischen in Decimaltheile des *Quadranten*, diesen in Decimaltheile des Halbmessers abzutheilen; so würde die Berechnung der Tangenten durch die Theilbrüche noch bequemer seyn, indem alsdenn, wie in den letzten Exempeln, die zu Potenzen zu erhebende Zahl n, selbst wenn die Eintheilung des Quadranten auf hunderttausend Theile geschähe, nur höchstens 6 Ziffern enthalten würde. Indessen ist sie auch für die beyden jetzt üblichen Eintheilungen des Quadranten unter allen mir bekannten unstreitig die bequemste. Man hat bekanntlich die von *Euler* in seiner *Introductio in Analysin infinitorum. Tom.* 1. *p.* 102. gegebenen Tangentenformeln noch immer für die bequemsten angesehen. Allein für das bisherige Nonagesimal- und Sexagesimalsystem sind sie offenbar höchst unbequem, und selbst für das neueste Decimalsystem fanden der Herr Professor *Hobert* und der Herr Astronom *Ideler* in ihren *neuen trigonometrischen Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten, Einleitung S. XXI.* dieselben ganz unbrauchbar, und leiteten die Tangenten lieber mittelst der einfachen Formeln $\text{tang. } A = \frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } A}$, und $\text{cos. } A = \frac{\text{cos. } A}{\text{sin. } A}$ aus den vorher berechneten Sinussen und Cosinussen her. Nach der neuen sinnreichen Interpolationsmethode, deren sie sich bey Berechnung ihrer Tafeln bedienten, und bey welcher sie nur sehr wenige Tangenten als Grenztangenten directe zu berechnen hatten, war dieses auch ohne Zweifel der bequemste Weg. Will man hingegen einzelne Tangenten unmittelbar für sich berechnen, oder Tangententafeln prüfen; so scheint mir der Gebrauch der Zus. 1. angeführten Theilbrüche der kürzeste und bequemste zu seyn, und hat man zugleich den Sinus durch die Eulersche Sinusformel berechnet; so läſst sich auch nun der Cosinus und die Cotangente durch die Formel $\text{cos. } A = \frac{\text{sin. } A}{\text{tang. } A}$, und $\text{cot. } A = \frac{\text{cos. } A}{\text{sin. } A}$ desto bequemer finden.

Zusatz 4. Wenn der Bogen ein *aliquoter* Theil des Halbmessers ist; so ist von den Theilbrüchen, die seine Tangente geben

a) Ein jeder schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt (IV. §. 20. Z. 8.).

b) Nicht nur die Zähler und Nenner der Theilbrüche nehmen immer zu, sondern die Theilbrüche selbst werden immer gröfser (IV. §. 20. Z. 12.), und kommen also dem wahren Werthe der Tangente immer näher.

c) Jeder von diesen Theilbrüchen ist so beschaffen, dafs kein Bruch aus kleinern Zahlen möglich ist, der dem wahren Werthe der Tangente so nahe käme, als er (IV. §. 21. Z. 2.).

d) Jeder Theilbruch differirt vom wahren Werthe der Tangente weniger, als der Quotient beträgt, wenn man 1 durch das Product seines Nenners in die Differenz zwischen diesem und dem Nenner des nächstvorhergehenden Theilbruchs dividirt (IV. §. 20. Z. 12.). Z. B. Für $n = 10$ ist Zus. 3. der dritte Theilbruch $\frac{104900}{1045501}$, und der zweyte $\frac{30}{299}$, folglich $1045501 - 299 = 1045202$, also differirt der dritte Theilbruch vom wahren Werthe der Tangente schon weniger, als um $\frac{1}{1045501 \,.\, 1045202}$, mithin um weniger als $\frac{1}{1517597\,36202}$.

Zusatz 5. Wenn daher der Bogen ein *aliquoter* Theil des Halbmessers ist; so ist das Verhältnifs seiner Tangente zum Halbmesser allemal irrational.

Denn da die Theilbrüche ohne Ende fortgehen (Zus. 3.), und ihre Zähler und Nenner immer gröfser werden (Z. 4.); so ist sowohl der Zähler als der Nenner des unendlichvielsten, der dem wahren Werthe der Tangente gleich ist, unendlich grofs. Nun aber ist er schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt (Z. 4. *a*.). Also läfst sich die Tangente durch keinen Bruch ausdrücken, dessen Zähler und Nenner endlich sind, mithin ist die Zahl, die ihr Verhältnifs zum Halbmesser bestimmt, eine Irrationalzahl, und daher das Verhältnifs selbst irrational.

Anmerkung.

Da der Zähler und Nenner desjenigen Theilbruchs, der dem wahren Werthe der Tangente gleich ist, unendlich grofs seyn mufs;

so schliefst *Lambert* in seinen *Beyträgen*, *zweyter Band*, *erste Abtheilung V. für die Erforscher der Quadratur des Circuls* §. 13, dafs die Tangente eines jeden rationalen Bogens v überhaupt irrational sey, wenn er auch nicht ein aliquoter, sondern ein *aliquanter* Theil des Halbmessers ist, mithin nicht blofs, wenn $v = \frac{1}{n}$, sondern auch, wenn überhaupt $v = \frac{m}{n}$ ist. Allein sollte dieser Schlufs gelten; so müfste erst bewiesen werden, dafs auch für den Fall, wo der Kettenbruch für tang. v nicht ein stetiger Bruch ist, die Theilbrüche dennoch insgesammt schon an sich beständig durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt sind. Denn gesetzt, dieses wäre nicht so, sondern der unendliche Zähler und Nenner desjenigen Theilbruchs, der dem wahren Werthe der Tangente gleich ist, hätten noch einen gemeinschaftlichen Theiler, so könnte der gröfste gemeinschaftliche Theiler selbst noch unendlich seyn, und es könnten also, wenn man den unendlichen Zähler und Nenner durch ihn dividirte, beyde Quotienten in der That endlich seyn, mithin der Theilbruch, der der Tangente gleich ist, sich wirklich angeben lassen, und daher eine Rationalzahl seyn. *Lambert* nahm aber den Satz, dafs die Theilbrüche auch in denjenigen Kettenbrüchen, die nicht stetige sind, schon an sich durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt seyn, nicht nur *ohne allen Beweis* als allgemein an, sondern das, statt des Beweises, von ihm angeführte Exempel widerlegt seine Allgemeinheit schon selbst augenscheinlich, indem er die nach der Vorschrift gefundenen Brüche erst wirklich auf die kleinsten Zahlen reducirt. Nämlich für $v = \frac{2}{3}$ setzt er den zweyten Theilbruch ganz richtig $\frac{9}{2} : \frac{23}{4}$, dieser aber ist unreducirt $= \frac{36}{46}$, also noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt, sondern mufs erst mittelst der Division durch 2 auf die kleinsten Zahlen $\frac{18}{23}$ reducirt werden. Eben so setzt er den dritten Theilbruch $\frac{131}{4} : \frac{333}{8}$, dieser aber ist unreducirt $= \frac{131 \cdot 8}{4 \cdot 333} = \frac{1048}{1332}$, also an sich ebenfalls noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt; ja hier

hat Lambert sogar den Divisor $\frac{333}{8}$ wider die Vorschrift schon reducirt angenommen, denn nach dieser ist er ursprünglich $\frac{666}{16}$ (§. 1. Z. 1.). Ein Gleiches gilt also auch vom vierten und allen folgenden, indem diese aus dem *unreducirten* dritten und zweyten hergeleitet werden müssen (IV.* §. 4. Anmerkung.).

Da also die Annahme, daſs in *jedem* Kettenbruche *überhaupt* die Theilbrüche insgesammt schon an sich durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, auf welche Lambert den allgemeinen Satz gründet, daſs die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational sey, offenbar unrichtig ist; so bleibt auch die Richtigkeit dieses Satzes unentschieden, und da er gerade aus diesem Satze schlieſst, daſs das Verhältniſs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser irrational sey; so hat auch dieser Schluſs nicht die mindeste Beweiskraft, und der *Lambertsche* Beweis läſst eben so wie der *Sturmsche* die Richtigkeit des letztern Satzes völlig unerwiesen. Soll daher die Richtigkeit beyder Sätze unwidersprechlich gewiſs seyn; so muſs strenge erwiesen werden, daſs derjenige Theilbruch, welcher dem wahren Werthe der Tangente eines rationalen Bogens gleich ist, selbst in dem Falle, da er an sich noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, von der Art sey, daſs, wenn er auch mittelst der Division durch seinen gröſsesten gemeinschaftlichen Theiler bereits auf die kleinsten Zahlen reducirt worden, sein Zähler und Nenner doch noch unendlich groſs bleiben, und sich also nicht genau angeben lassen. Dieser Beweis aber setzt offenbar eine allgemeinere Theorie der Kettenbrüche voraus, als man sie noch zu Lamberts Zeiten hatte. Da nun letztere in der Abhandlung IV. gegeben worden; so wollen wir versuchen, denselben aus ihr strenge herzuleiten.

Lehrsatz 2.

§. 2. Wenn der rationale Bogen $v = \frac{a}{b}$ ist; so ist

$$\text{tang.}\,\frac{a}{b} = \cfrac{a}{b - \cfrac{a^2}{3b - \cfrac{a^2}{5b - \cfrac{a^2}{7b - \cfrac{a^2}{9b - \dots}}}}}$$

Beweis. Denn da tang. $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{\left[1 : \frac{a}{b}\right] - \cfrac{1}{\left[3 : \frac{a}{b}\right] - \cfrac{1}{\left[5 : \frac{a}{b}\right] - \ldots}}}$ (§. 1.)

folglich tang. $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{b : a - \cfrac{1}{3\,b : a - \cfrac{1}{5\,b : a - \cfrac{1}{7\,b : a - \ldots}}}}$;

so ist tang. $\frac{a}{b} = \cfrac{a}{b - \cfrac{a^2}{3\,b - \cfrac{a^2}{5\,b - \cfrac{a^2}{7\,b - \cfrac{a^2}{9\,b - \ldots}}}}}$ (IV. §. 17. Z. 1. No. 3.).

Zusatz 1. Also wird tang. $\frac{a}{b}$ durch folgende Theilbrüche bestimmt:

0	$0 : 1$
$+\frac{a}{b}$	$a : b$
$-\frac{a^2}{3\,b}$	$3\,a\,b : 3\,b^2 - a^2$
$-\frac{a^2}{5\,b}$	$15\,a\,b^2 - a^3 : 15\,b^3 - 6\,a^2\,b$
$-\frac{a^2}{7\,b}$	$105\,a\,b^3 - 10\,a^3\,b : 105\,b^4 - 45\,a^2\,b^2 + a^4$
$-\frac{a^2}{9\,b}$	$945\,a\,b^4 - 105\,a^3\,b^2 + a^5 : 945\,b^5 - 420\,a^2\,b^3 + 15\,a^4\,b$
$-\frac{a^2}{11\,b}$	$10395\,a\,b^5 - 1260\,a^3\,b^3 + 21\,a^5\,b : 10395\,b^6 - 4725\,a^2\,b^4 + 210\,a^4\,b^2 - a^6$
	u. s. w.

Zusatz 2. Wenn man daher den n^{ten} von diesen Theilbrüchen überhaupt $\frac{\gamma}{\delta}$, und nach der Reihe die Coefficienten im Zähler A, B, C, D etc., im Nenner aber A, M, N, O etc. nennt; so ist

$$\gamma = Aab^{n-1} - Ba^3b^{n-3} + Ca^5b^{n-5} - Da^7b^{n-7} + \ldots$$

$$= b^n\left(A\frac{a}{b} - B\frac{a^3}{b^3} + C\frac{a^5}{b^5} - D\frac{a^7}{b^7} + - \ldots\right), \text{ und}$$

$$\delta = Ab^n - Ma^2b^{n-2} + Na^4b^{n-4} - Oa^6b^{n-6} + - \ldots$$

$$= b^n\left(A - M\frac{a^2}{b^2} + N\frac{a^4}{b^4} - O\frac{a^6}{b^6} + \ldots\right).$$

Setzt man daher die Parenthese des Zählers $= x$, und des Nenners $= y$, so ist jeder n^{te} Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{b^n x}{b^n y}$.

Wären nun hier x, y *ganze* Zahlen; so wäre b^n ein gemeinschaftlicher Theiler von γ, δ, und der Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$ liefse sich alsdenn auf den Bruch $\frac{x}{y}$ reduciren, der aus kleinern Zahlen besteht. Allein obgleich die Producte $b^n x$, $b^n y$ ganze Zahlen sind; so folgt doch hieraus noch nicht, dafs auch die Factoren x, y ganze Zahlen sind, sondern beyde können solche Brüche seyn, dafs ihre Nenner Theiler von b^n sind, mithin folgt noch gar nicht, dafs b^n ein gemeinschaftlicher Theiler von γ, δ sey, und eben so bleibt es unentschieden, ob $\frac{\gamma}{\delta}$ schon durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, oder nicht. Ist der Bruch $\frac{\gamma}{\delta}$ noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt; so kann der gröfseste gemeinschaftliche Theiler seines Zählers und Nenners nie gröfser seyn, als a^{2n-1} (IV. §. 5. Z. 3.), also kann sein Zähler nie kleiner werden, als der Quotient $\frac{\gamma}{a^{2n-1}}$, und sein Nenner nie kleiner, als $\frac{\delta}{a^{2n-1}}$.

Zusatz 3. Man setze $b = a + r$; so ist

$$b^n = a^n + na^{n-1}r + \frac{n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2}a^{n-2}r^2 + \frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}a^{n-3}r^3 + \ldots$$

folglich $\frac{b^n}{a^{2n-1}} = \left[1 + \frac{nr}{a} + \frac{n.n-1.r^2}{1.2.a^2} + \frac{n.n-1.n-2.r^3}{1.2.3.a^3} + \ldots\right] : a^{n-1}$. Also kann im n^{ten} Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$, wenn er auf die kleinsten Zahlen reducirt wird, sein Zähler γ nie kleiner werden, als

$$\frac{x}{a^{n-1}}\left[1 + \frac{nr}{a} + \frac{n.n-1.r^2}{1.2.a^2} + \frac{n.n-1.n-2.r^3}{1.2.3.a^3} + \ldots\right].$$

und sein Nenner δ nie kleiner, als

$$\frac{y}{a^{n-1}}\left[1 + \frac{nr}{a} + \frac{n.n-1.r^2}{1.2.a^2} + \frac{n.n-1.n-2.r^3}{1.2.3.a^3} + \ldots\right] \text{ (Z. 2.).}$$

Zusatz 4. Da nun derjenige Theilbruch, der dem wahren Werthe von tang. $\frac{a}{b}$ gleich ist, der *unendlichvielste* ist, folglich hier $n = \infty$ wird; so kann, wenn man ihn auf die kleinsten Zahlen reducirt, sein Zähler nicht kleiner werden, als

$$\frac{x}{a^\infty}\left[1 + \frac{r\,\infty}{a} + \frac{r^2\,\infty^2}{2\,a^2} + \frac{r^3\,\infty^3}{2.3.a^3} + \frac{r^4\,\infty^4}{2.3.4.a^4} + \ldots\right],$$

und sein Nenner nicht kleiner, als

$$\frac{y}{a^\infty}\left[1 + \frac{r\,\infty}{a} + \frac{r^2\,\infty^2}{2\,a^2} + \frac{r^3\,\infty^3}{2.3.a^3} + \frac{r^4\,\infty^4}{2.3.4.a^4} + \ldots\right].$$

Man setze der Kürze wegen $1 + \frac{r\,\infty}{a} + \frac{r^2\,\infty^2}{2\,a^2} + \frac{r^3\,\infty^3}{2.3\,a^3} + \ldots = P$; so ist, weil alle niedrige Potenzen von ∞ gegen die höchste $r^\infty\,\infty^\infty$ verschwinden, und z. B. $1 + \frac{r\,\infty}{a} + \frac{r^2\,\infty^2}{2.a^2} + \frac{r^3\,\infty^3}{2.3.a^3} = \frac{r^3\,\infty^3}{2.3.a^3}$ ist,

$P = \frac{r^\infty\,\infty^\infty}{2.3.4\ldots\infty.a^\infty}$, folglich $\frac{1}{a^\infty}P = \frac{r^\infty.\infty^\infty}{2.3.4\ldots\infty.a^{2\infty}}$, also

$$\log.\frac{1}{a^\infty}P = \infty.l.r + \infty.l.\infty - (l.2 + l.3 + l.4 + \ldots + l.\infty) - \infty.l.a^2$$
$$= \infty(l.\infty + l.r - l.a^2) - (l.2 + l.3 + l.4 + \ldots + l.\infty)$$
$$= \infty\,l.\infty - (l.2 + l.3 + l.4 + \ldots + l.\infty).$$

Nun würde, wenn in der Reihe $l.\,2 + l.\,3 + l.\,4 + \ldots + l.\,\infty$ die Differenz aller Glieder $= 1$ wäre, die Summe derselben nur $= \frac{1}{2}\,\infty\; l.\,\infty$, mithin $\log. \frac{1}{a^\infty} P = \frac{1}{2}\,\infty\,.\,l.\,\infty$ seyn. Allein da die Differenz der Logarithmen von 2, 3, 4 etc. weit kleiner als 1 ist; so ist die Summe ihrer unendlichen Reihe weit kleiner, als $\frac{1}{2}\,\infty\,.\,l.\,\infty$, folglich $\log. \frac{1}{a^\infty} P$ noch gröſser, als $\frac{1}{2}\,\infty\,.\,l.\,\infty$.

Da nun $\frac{1}{2}\,\infty\,.\,l.\,\infty = l.\,\infty^{\frac{1}{2}\infty}$ ist; so ist $\log. \frac{1}{a^\infty} P > \log.\,\infty^{\frac{1}{2}\infty}$, folglich $\frac{1}{a^\infty} P > \infty^{\frac{1}{2}\infty}$, also $\frac{x}{a^\infty} P > x\,.\,\infty^{\frac{1}{2}\infty}$, und $\frac{y}{a^\infty} P > y\,.\,\infty^{\frac{1}{2}\infty}$, mithin ist sowohl $\frac{x}{a^\infty} P$, als $\frac{y}{a^\infty} P$ unendlich groſs.

Also bleibt in dem Theilbruch $\frac{\gamma}{\delta}$, der dem wahren Werthe von tang. $\frac{a}{b}$ gleich ist, auch wenn er schon auf die kleinsten Zahlen reducirt wird, sein Zähler und Nenner noch unendlich groſs, mithin läſst sich die Tangente des rationalen Bogens in dem Falle, da der ihr gleiche unendlichvielste Theilbruch sich noch auf kleinere Zahlen reduciren lieſse, dennoch durch keinen Bruch ausdrücken, dessen Zähler und Nenner endlich wäre, also ist in diesem Falle ihr Verhältniſs zum Halbmesser 1 irrational.

Lehrsatz 3.

§. 3. Wenn der Bogen $\frac{a}{b}$ zum Halbmesser 1 ein rationales Verhältniſs hat; so ist das Verhältniſs seiner Tangente zum Halbmesser jedesmal irrational.

Beweis. Denn da in den Theilbrüchen für tang. $\frac{a}{b}$ die Zähler und Nenner ohne Ende immer gröſser werden (§. 2. Z. 1.); so muſs im unendlichvielsten Theilbruch, welcher der Tangente von $\frac{a}{b}$ vollkommen gleich ist, der Zähler und Nenner gröſser seyn, als jede Zahl, die sich angeben läſst, d. i. unendlich groſs. Nun ist derselbe entweder schon an sich durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt, oder nicht. Ist das erstere, so ist von selbst klar, daſs er eine Irrationalzahl ist. Ist aber das letztere, so läſst er sich noch auf kleinere Zahlen reduciren, bleibt aber auch auf die kleinsten reducirt, noch ein Bruch von unendlich groſsem Zähler und Nenner (§. 2. Z. 4.), und ist also gleichfalls eine Irrationalzahl, mithin ist im Verhältniſs der Tangente eines rationalen Bogens zum Halbmesser der Exponent allemal eine Irrationalzahl, also das Verhältniſs selbst irrational.

Lehrsatz 4.

§. 4. Wenn das Verhältniſs der Tangente zum Halbmesser rational ist; so ist das Verhältniſs ihres Bogens zum Halbmesser jederzeit irrational.

Beweis. Denn wäre das Verhältniſs des Bogens zum Halbmesser rational; so wäre das Verhältniſs der Tangente zum Halbmesser irrational (§. 3.), also, der Annahme zuwider, nicht rational.

Zusatz. Also ist in diesem Falle auch das Verhältniſs des Bogens zum Durchmesser jederzeit irrational.

Lehrsatz 5.

§. 5. Das Verhältniſs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser ist irrational.

Beweis. Denn wenn die Tangente dem Halbmesser gleich ist; so ist ihr Bogen dem achten Theil der Kreislinie gleich. Nun ist in diesem Fall das Verhältniſs der Tangente zum Halbmesser rational,

mithin ist das Verhältnifs des achten Theils der Kreislinie zum Durchmesser irrational (§. 4. Z.), also auch das Verhältnifs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser selbst.

Anmerkung.

Nunmehr ist es also streng erwiesen, dafs es schlechterdings unmöglich ist, eine Zahl anzugeben, die das Verhältnifs der Kreislinie zu ihrem Durchmesser ganz genau ausdrückte, sondern dafs dieses sich blofs durch eine unendliche Reihe, oder durch einen Decimalbruch von unendlich vielen Decimalziffern bestimmen läfst, so dafs man dasselbe immer genauer findet, je mehrere Glieder der Reihe, oder je mehrere Decimalziffern man nimmt. Man sieht aber zugleich, dafs dieser Beweis weit tiefere Untersuchungen erfordert, als Lambert sich vorstellte, wenn derselbe in der That bündig seyn soll, indem es hier unvermeidlich nöthig ist, einen Bruch von *unendlichem* Zähler und Nenner, dergleichen der Kettenbruch für die Tangente des rationalen Bogens ist, auf die kleinsten Zahlen zu reduciren, um es überzeugend einzusehen, dafs er auch nach dieser Reduction noch unendlich bleibt, und also wirklich eine Irrationalzahl ist.

Eben hiedurch aber ist nun auch strenge erwiesen, dafs das Verhältnifs des Durchmessers zur *Seite des Quadrats, das der Kreisfläche gleich ist*, gleichfalls *irrational* ist, und dafs sich also keine Zahl angeben läfst, welche genau bestimmte, wie grofs die Seite desjenigen Quadrats sey, welches der Fläche eines Kreises vom gegebenen Durchmesser vollkommen gleich ist. Denn es sey der Durchmesser $= d$, die Peripherie des Kreises $= p$, die Seite des der Kreisfläche gleichen Quadrats $= a$; so ist $\frac{1}{4}\, dp = a^2$. Man setze also, das Verhältnifs der Seite a zum Durchmesser d sey rational, z. B. $a = \frac{m}{n}\, d$; so wäre $\frac{1}{4}\, dp = \frac{m^2 d^2}{n^2}$, folglich $p = \frac{4 m^2}{n^2}\, d$, mithin $p : d = 4\, m^2 : n^2$. Da nun das Verhältnifs $4\, m^2 : n^2$ rational ist; so müfste auch das Verhält-

nifs der Peripherie des Kreises zum Durchmesser rational seyn. Da nun dieses, wie nunmehr strenge erwiesen worden, falsch ist; so ist es jetzt auch streng erwiesene Wahrheit, dafs das Verhältnifs des Durchmessers des Kreises zur Seite des ihm gleichen Quadrats ebenfalls irrational ist.

VI.

Über das

Fundament der Differentialrechnung.

Einleitung.

Wenn je ein Journal-Aufsatz wichtig und der Unsterblichkeit werth war; so war es wohl derjenige, durch welchen der grofse *Leibniz* die Grundzüge seiner neu erfundenen *Differentialrechnung* 1684 im October in den Actis Erudit. Lips. *auf drey Quartblättern* lieferte. Über den unnennbaren Werth dieser grofsen Erfindung kann bey den Mathematikern nur Eine Stimme seyn. Durch sie erhielt die ganze Analysis nicht nur eine ganz neue Gestalt, sondern die unendlichen Fortschritte und Erweiterungen, welche jeder Zweig der mathematischen Wissenschaften durch sie aufs schnellste gewann, und noch in immer höherem Grade von ihr zu erwarten berechtigt ist, liegen klar am Tage.

Der Zweck dieser erhabenen Wissenschaft ist der, das ganze analytische Verfahren durch unerwartete Kunstgriffe im *höchst möglichen Grade zu erleichtern und abzukürzen.* Eben dieses ist auch der Zweck der vom grofsen *Newton* vielleicht etwas weniger früher erfundenen, aber weit später bekannt gemachten *Fluxionenrechnung*, welche *der Hauptsache nach* mit der Differentialrechnung einerley ist, und sich von letzterer nur in Ansehung der Betrachtungsart der Gröfsen und der gewählten Ausdrücke und Zeichen unterscheidet. Indessen giebt dieser Unterschied selbst der Differentialrechnung vor der Fluxionenrechnung einen entschiedenen Vorzug. Denn eines Theils sind nicht nur ihre Ausdrücke und Zeichen, sondern selbst ihre Ansicht der Sache und die darauf beruhende Verfahrungsart weit bequemer, leichter und deutlicher, als die der Fluxionenrechnung, welche daher aufser dem Vaterlande ihres Erfinders, fast in keinem andern Lande von Europa wirklich in Gebrauch gekommen ist. Andern Theils aber besteht der gröfseste und wesentliche Vorzug der erstern vor der letztern unstreitig darinn, dafs jene auf ihrem *eigenthümlichen*, diese aber auf einem *fremden* Boden aufgebauet worden. Beyde Wissenschaften sind, und sollen, ihrem Zweck gemäfs, nichts anders seyn, als eine

höhere *Analysis*, oder vielmehr die Analysis vom *ersten* und *höchsten* Range. Die Analysis aber hat nicht Gröſsen von gewisser Qualität, z. B. Raum, Bewegung, Schwere, Luft, Licht etc., sondern jede Gröſse überhaupt, von welcher Qualität sie seyn mag, zu ihrem Object, und soll die allgemeinen Principien liefern, die Function einer *jeden* Gröſse, von welcher Art sie irgend sey, durch eine Gleichung auszudrücken, und diese entweder mittelst der Algebra, oder wenn ihre Auflösung die Kräfte der Algebra übersteigt, durch eine unendliche Reihe von *Potenzen*, d. i. von *Zahlen* aufzulösen. Sie gehört also gar nicht, wie z. B. die Geometrie, Mechanik etc. zur speciellen, sondern zur *allgemeinen* Gröſsenlehre, oder zur höhern *Arithmetik*, und muſs daher, wenn sie der so nöthigen wissenschaftlichen Topik gemäſs auf ihrem eigenthümlichen Boden bleiben soll, gar nicht auf geometrische oder mechanische Begriffe; sondern lediglich auf den allgemeinen Begriff einer *gezählten Gröſse überhaupt* gegründet werden. Diesen wahren Gesichtspunkt faſste *Leibniz* auf, denn seine Differentialrechnung nimmt keine Rücksicht auf irgend eine Gröſse von gewisser Art, sondern sie ist das, was sie seyn soll, und was ihr Name anzeigt, allgemeine *Rechnung*. *Newton* hingegen gründete seine Fluxionenrechnung nicht bloſs auf geometriche, sondern sogar auf mechanische Begriffe, denn seine *flieſsenden Gröſsen* sind *Linien*, und ihre *Fluxion* ist die *Geschwindigkeit*, die ein, eine Linie beschreibender Punkt, wenn man den Anfang seiner Bewegung von einem wirklichen Ort an rechnet, an jeder Stelle dieser Linie hat. Nun sind der allgemeinen Analysis, dergleichen doch diese Wissenschaft seyn soll, wie gezeigt worden, schon die geometrischen Begriffe fremde, und es ist schon eine offenbare μεταβασις εις αλλο γενος, wenn z. B. *Wolf* die Regel, ein Product zu differentiren, in seinen Elementis Tom. 1. §. 12. aus der Natur eines rechtwinklichten Vierecks herzuleiten sucht. Der Begriff der Bewegung aber ist sogar der *Geometrie* fremde, nicht nur weil er bloſs aus der Erfahrung geschöpft, und daher *empirisch* ist, sondern weil zwar die physischen Körper, ihren Ort und Raum, aber kein Theil noch Punkt des Raums selbst seinen Ort in ihm verändern kann, und wenn die Alten, z. B. Archimedes, Dinostratus etc. in der Geometrie den Begriff der Bewegung zur Hülfe nahmen, um die Erzeugung der Linien als *stetig* darzustel-

len; so war diese Vorstellung eine blofs *imaginaire*, die sich die ursprüngliche productive Einbildungskraft allerdings machen kann, indem sie während dieses Geschäftes den geometrischen Punct als einen physichen ansieht, bey welchem sie blofs von seiner Ausdehnung abstrahirt. Allein es ist wohl zu merken, dafs sie durch diese imaginaire Vorstellung nicht die *Entstehung* oder *Erzeugung* der Linien *erklären*; sondern blofs die *Beschreibung* oder *Bezeichnung* der schon a priori im Gemüthe erzeugten Linie darstellen wollen, mithin setzt die imaginirte Bewegung des Punkts die Linie, die er beschreiben soll, schon als existirend voraus, und es kann daher nicht ihr eigener Anfangspunct selbst als der sie beschreibende gedacht werden, denn sonst würde die Linie dem Gesetz der Stetigkeit zuwider, diesen ihren Anfangspunkt verlieren, sondern hiezu mufs man sich einen andern, auf ihrem Anfangspunkt liegenden, d. i. im Grunde einen physischen Punkt vorstellen, von dessen Ausdehnung man abstrahirt. Gesetzt aber auch, der Begriff der Bewegung überhaupt fände, wenn man dabey nicht nur von allen empirischen, sondern auch von den Begriffen der Geschwindigkeit, Zeit und Kraft abstrahirte, in der Geometrie nicht blofs auf eine imaginaire, sondern reelle Art statt; so bleibt doch der Newtonsche Begriff der Fluxionen, der nicht die Bewegung selbst, sondern blofs ihre *Geschwindigkeit* und die *Zeit*, in welcher sie geschieht, zum Gegenstande hat, der Geometrie durchaus fremde, und gehört nicht einmal in die Geometrie, geschweige denn in die Analysis als allgemeine Gröfsenlehre, sondern lediglich in die *Mechanik*. Also ruht die Fluxionenrechnung, in so fern sie diefs seyn soll, was die Differentialrechnung ist, nämlich, allgemeine Analysis, auf ganz *fremdartigen Principien*, und kann daher auch nicht anders, als durch grofse Umschweife gründlich vorgetragen werden — ein Umstand, der schon allein hinreichend ist, den Vorwurf der Engländer, als ob Leibniz die Idee der Differentialrechnung von Newton entlehnt hätte, als ungerecht zu widerlegen, da ohnehin sowohl die Schriften der Alten, als der Neuern, nach und nach dieser Art Rechnungen so nahe führten, dafs, wie Kästner *) sagt, Geister,

*) Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen §. 44. 90.

wie sie waren, wohl jeder für sich, ohne grofse Schwierigkeit darauf kommen konnten, und nicht nur der Begriff der Fluxionen, ja das Wort fluere selbst sich schon in Nepers 1614 herausgekommenem Werke: *Mirifici canonis logarithmorum descriptio L. 1. c. 1.* vorfindet, sondern auch die Regel, an jeder krummen Linie die Tangenten zu ziehen, auf welche sowohl die Differential- als Fluxionenrechnung zuerst angewandt wurde, schon von *Barrow*, Newtons Lehrer, in seinen *Lection. Geom.* die Newton gewifs, und Leibniz vermuthlich gelesen hat, gegeben war.

So schätzbar aber die Differentialrechnung ist; so hat sie gleichwohl von jeher den Vorwurf erdulden müssen, dafs ihr Fundament nicht fest sey, und daher ihrem Vortrage die gehörige Gründlichkeit fehle, indem sie nicht nur auf dem Begriff unendlich kleiner Gröfsen an sich zu ruhen, sondern sogar *unzählliche Grade* dieser unendlich kleinen Gröfsen vorauszusetzen scheine. Nun ist zwar die Richtigkeit dieses Calculs so bewährt, dafs keinem Analysten die geringste Besorgnifs anwandeln kann, von demselben irre geführt zu werden. Da indessen unwandelbare Festigkeit der Principien, und vollkommene Evidenz ein Hauptvorzug der Mathematik ist; so würde es für diesen erhabensten Theil der reinen Mathematik, den man mit Recht den Gipfel derselben nennen kann, doch immer ein nicht geringer Anstofs bleiben, wofern jener Vorwurf wirklich Grund hätte, und man hat daher mit rühmlichen Eifer alles versucht, um sie von jenem Vorwurfe völlig zu befreyen.

Da Gründlichkeit und Evidenz gerade das ist, was mich schon frühe an die Mathematik fesselte; so hatte die Sache auch für mich zu viel Interesse, als dafs ich daran nicht gleichfalls hätte Theil nehmen sollen. Der Erfolg meiner Untersuchungen war nun zwar eine Zeitlang der, dafs ich die Schwierigkeiten mehr kennen, als heben lernte. Allein nachdem meine Theorie der Winkelflächen, und die auf ihr beruhende Theorie der Parallelen, mir den Weg zu der bis dahin gänzlich unbekannten vollständigen Theorie des Unendlichen gebahnt hatte; so fand ich, dafs die Differentialrechnung, wenn man auf ihren wahren Geist sieht, ohne mit dem widersprechenden Begriff *unendlich kleiner Gröfsen* das mindeste zu thun zu haben, auf eben so festen Principien ruht, als die sogenannte Analysis des End-

lichen. Ich nahm daher Gelegenheit, in einem Scholion, welches ich einer 1787 gehaltenen Disputation beyfügte, dieses deutlich zu zeigen. Da dieses indessen hier nicht so ausführlich geschehen konnte, als es die Natur der Sache erfordert, so brachte ich diese Schrift nicht weiter ins Publicum, sondern wartete lieber auf eine bequemere Gelegenheit, den wahren Geist der Differentialrechnung, und die Festigkeit ihres Fundaments ins vollkommenste Licht zu stellen. Diese bietet sich mir jetzo dar, und da die Sache nicht blofs Kenner der Differentialrechnung, sondern vorzüglich diejenigen angeht, welche in die Geheimnisse dieser erhabenen Wissenschaft eingeweiht zu werden wünschen; so halte ich es für Pflicht, durch eine deutliche Entwickelung der ersten hierher gehörigen Begriffe, mich auch diesen so verständlich zu machen, dafs, wofern sie nur mit der gemeinen Analysis gehörig bekannt sind, sie sogleich beym ersten Eintritt in ihr Heiligthum, ihre wahre Natur und die Festigkeit ihrer Principien evident einsehen können.

1.

Wenn man in einer Gleichung gewisse Gröfsen als solche betrachtet, deren Werthe sich beliebig ändern lassen, andere aber als solche, welche hiebey immer denselben Werth behalten; so nennt man die erstern die *veränderlichen* (*variabiles*), die letztern aber die *beständigen* Gröfsen (*constantes*), und drückt gewöhnlich jene durch die ersten, und diese durch die letzten Buchstaben des Alphabets aus, eben so, wie man es in der gemeinen Analysis mit den bekannten und unbekannten Gröfsen zu machen pflegt. Es kommt also lediglich auf den Gesichtspunct an, aus welchen man bey der Untersuchung die Gröfsen betrachtet. So sind z. B. für jeden *gegebenen* Kreis die Durchmesser alle gleich, die Abscissen hingegen lassen sich als beliebige Theile des Durchmessers, und die Ordinaten als beliebige Theile seiner Hälfte ansehen, daher sieht man in der Gleichung für den Kreis $y^2 = ax - x^2$ den Durchmesser a als eine *beständige*, die Abscisse x aber, und die Ordinate y als *veränderliche* Gröfsen an. Wollte man hingegen für eine *gegebene Abscisse* die Ordinate in allen möglichen Kreisen suchen;

so würde die *Abscisse* als *beständig* $= b$, und der *Durchmesser* als *veränderlich* $= z$ anzusehen, und daher die Gleichung für den Kreis folgende seyn $y^2 = bz - b^2$.

2.

Jede Gröſse, deren Werth von einer oder mehreren veränderlichen Gröſsen abhängig ist, heiſst eine *Function* dieser letztern, die Gleichung, durch welche sie ausgedrückt wird, sey von welcher Art sie wolle, und es sey bekannt, oder unbekannt, durch welche Operationen die Function aus den Gröſsen, von denen sie abhängt, sich wirklich bestimmen läſst. Hieraus folgt zugleich, daſs jede Function, da ihr Werth von veränderlichen Gröſsen abhängt, selbst eine *veränderliche* Gröſse ist, mithin jede veränderliche Gröſse, deren Function sie ist, selbst wieder eine Function von ihr und den übrigen veränderlichen Gröſsen ist. Dagegen können die veränderlichen Gröſsen, von denen die Function abhängig ist, auch schon an sich von einander abhängig, oder ganz unabhängig seyn. So ist in der Gleichung $y^2 = ax - x^a$, y eine Function von x und x eine Function von y. Eben so ist in den Gleichungen $az^2 = bxy + y^2$; $z^3 - y^3 = axy + zx^2 + b^3$; z eine Function von x und y, x eine Function von z und y, y eine Function von z und x, dagegen können x, y ohne auf z zu sehen, schon für sich von einander abhängig, und daher gegenseitige Functionen von einander, oder an sich von einander ganz unabhängige Gröſsen seyn. So ist z. B. in der Gleichung $z = \frac{1}{2}xy$, wenn z die Fläche eines Dreyecks, x seine Grundlinie, und y seine Höhe bedeutet, zwar x eine Function von z und y, und y eine Function von z und x, aber x und y sind eben so, wie in jedem Zahlenproducte xy, an sich selbst von einander ganz unabhängig.

3.

Da also bey jeder Function ihr Werth als von einer oder mehrern *veränderlichen Gröſsen abhängig* betrachtet wird; so entsteht aus diesem Gesichtspunct sogleich von selbst die Frage: *wenn nun drey veränderliche Gröſsen um einen gewissen Theil zu- oder abnehmen, um wie viel nimmt dadurch die Function selbst ab oder zu? und welches ist also der*

Exponent des geometrischen Verhältnisses, in welchem die Zu- oder Abnahme der Function zur Zu- oder Abnahme ihrer veränderlichen Gröſsen steht? Die groſse Wichtigkeit dieser Frage leuchtet von selbst ein. Denn wie kann man in die Natur irgend einer Function deutlicher und tiefer eindringen, als wenn man die *Art und Gröſse ihrer Abhängigkeit von ihren veränderlichen Gröſsen* durch das Verhältniſs ihrer wechselseitigen Veränderungen, nämlich ihrer gegenseitigen Zu- oder Abnahmen bestimmt anzugeben weiſs. Man nehme z. B. die leichte Gleichung $x = y^2$; so weiſs ich, daſs x eine Function von y ist, denn der Werth von x hängt offenbar vom Werthe von y ab, und wenn dieser sich verändert; so verändert sich auch jener. Aber dieſs ist für den Mathematiker nicht befriedigend, sondern wenn er mit dem Begriff der *Function* als einer neuen Ansicht der analytischen Gröſsen hervortritt, so wird es für ihn unerläſsliche Pflicht, die *Gröſse der Veränderung*, welche die Veränderung von y in der Function x hervorbringt, d. i. das *Verhältniſs* dieser beyderseitigen Veränderungen aufzusuchen. Man lasse daher y um eine beliebige Gröſse Y wachsen, und setze, daſs hiedurch die Function x um die Gröſse X wachse; so verändert sich nun y in $y + Y$, und x in $x + X$, folglich die Gleichung $x = y^2$ in diese: $x + X = (y + Y)^2 = y^2 + 2\,y\,Y + Y^2$, mithin ist, weil $x = y^2$ ist, $X = 2\,y\,Y + Y^2$, und $\frac{X}{Y} = 2\,y + Y$. Nunmehr ist also die Natur der Function x aufs vollkommenste klar, denn man sieht bestimmt ein, daſs wenn y um Y wächst, x um $2\,y\,Y + Y^2$ wachsen muſs, und daſs also das Increment von x das Increment von y, um die Summe der doppelten Gröſse y und ihres Increments Y übersteigt.

4.

Da nun die gemeine Analysis sich bloſs mit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen beschäftiget, um das Unbekannte in denselben aus dem Bekannten, mit welchem es vermischt ist, zu entwickeln; ohne auf die veränderlichen Werthe der Gröſsen zu sehen, so eröfnet sich mit dem Begriff der Function ein neues Gebiet der Mathematik, nämlich eine Analysis, die man als über die gewöhnliche erhaben, die *höhere* nennen kann, und da die Zu- und Abnahme der

Function, mit welcher diese sich beschäftigt, die Differenz zwischen der unveränderten und veränderten Function, nämlich: $X = (x+X) - x$ ist; so kann dieselbe füglich die *Differenzenrechnung* genannt werden, und sie ist also die Wissenschaft, aus der Zu- oder Abnahme der veränderlichen Gröſsen, die Zu- oder Abnahme ihrer Function, oder das Verhältniſs zwischen den beyderseitigen Zu- oder Abnahmen zu finden. Da aber die Abnahme eine *negative* Zunahme ist; so ist es gar nicht nöthig, auf jene eine besondere Rücksicht zu nehmen, sondern man darf diejenige Gröſse, um welche die veränderliche Gröſse, oder ihre Function *abnimmt*, bloſs als eine *Negativgröſse* ansehen, und so kann man die Differenzenrechnung auf eine solche Art behandeln, als ob sie es bloſs mit der *Zunahme* der Gröſsen und ihrer Functionen zu thun hätte. Da die Zunahme der Function und ihrer veränderlichen Gröſsen, die Differenz zwischen der unveränderten und veränderten Gröſse ist; so bezeichnet man diese in der Differenzenrechnung, wo die Zunahme eine bestimmte endliche Gröſse ist, gewöhnlich dadurch, daſs man der Gröſse, zu welcher sie gehört, ein $\triangle$ vorsetzt, z. B. die Zunahmen von z, x, y deutet man durch $\triangle z$, $\triangle x$, $\triangle y$ aus.

5.

Da die beständigen Gröſsen als solche betrachtet werden, die bey der Zu- oder Abnahme der andern ihren Werth gar nicht verändern (1), mithin für beständige Gröſsen gar keine Zunahme statt findet; so fallen in der Zunahme $\triangle z$ der Function z alle beständige Gröſsen, die nicht Coefficienten der veränderlichen Gröſsen sind, gänzlich weg, und es ist also für die Zunahme $\triangle z$ einerley, ob die Gleichung für die Function z beständige Gröſsen, die mit den veränderlichen bloſs durch die Addition oder Subtraction verbunden sind, enthält oder nicht, z. B. wenn $z = x$ ist; so ist $z + \triangle z = x + \triangle x$ (3.), also $\triangle z = \triangle x$, und wenn $z = x + a - b$ ist; so ist $z + \triangle z = x + \triangle x + a - b$, also gleichfalls $\triangle z = \triangle x$. Ist hingegen die beständige Gröſse der Coefficient einer veränderlichen; so ist sie auch in der Gleichung für die Zunahme der Function der Coefficient der Zunahme einer veränderlichen Gröſse, nämlich, wenn $z = ax$; so ist $z + \triangle z = a(x + \triangle x)$

$= ax + a\triangle x$, also $\triangle z = a\triangle x$, und $\frac{\triangle z}{\triangle x} = a$, mithin ist in diesem Fall das Differenzenverhältniſs jederzeit dem Coefficienten der veränderlichen Gröſse gleich.

6.

Wenn in der Gleichung einer Function ihre veränderlichen Gröſsen mit einander bloſs durch Addition oder Subtraction verbunden sind, so stehen ihre Zunahmen in der Gleichung für die Zunahme der Function in eben dieser Verbindung, z. B. wenn $z = ax + by - cv$; so ist $z + \triangle z = ax + a\triangle x + by + b\triangle y - (cv + c\triangle v)$, also $\triangle z = a\triangle x + b\triangle y - c\triangle v$.

7.

Wenn $z = xy$ ist; so ist $z + \triangle z = (x + \triangle x)(y + \triangle y)$
$= xy + y\triangle x + x\triangle y + \triangle x . \triangle y$, folglich
$\triangle z = y\triangle x + x\triangle y + \triangle x . \triangle y$, und

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = y + x . \frac{\triangle y}{\triangle x} + \triangle y.$$

8.

Wenn daher $z = x^2$, folglich $y = x$ ist; so ist $\triangle z = 2x . \triangle x + \triangle x^2$, und $\frac{\triangle z}{\triangle x} = 2x + \triangle x$. Ist $z = x^3 = x^2 . x$; so ist

$\triangle z = 3x^2 . \triangle x + 3x . \triangle x^2 + \triangle x^3$, und

$\frac{\triangle z}{\triangle x} = 3x^2 + 3x . \triangle x + \triangle x^2$ u. s. w.

Ist überhaupt $z = x^n$; so ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$\triangle z = nx^{n-1}\triangle x + \frac{n . n-1}{1 . 2} x^{n-2} . \triangle x^2 + \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} x^{n-3}\triangle x^3 + \ldots$$

und $$\frac{\triangle z}{\triangle x} = n x^{n-1} + \frac{n . n-1}{1 . 2} x^{n-2} . \triangle x + \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} x^{n-3} . \triangle x^2 + \ldots$$

9.

Wenn $z = \frac{x}{y}$ ist; so ist $z + \Delta z = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}$, folglich

$$yz + y\Delta z + z\Delta y + \Delta y \cdot \Delta z = x + \Delta x, \text{ folglich}$$

$$(y + \Delta y) \cdot \Delta z + \frac{x}{y} \Delta y = \Delta x, \text{ also}$$

$$\Delta z = \frac{y \Delta x - x \Delta y}{(y + \Delta y) y}.$$

10.

Diese Grundbestimmungen für die Zunahme derjenigen Functionen, welche Summen, Differenzen, Producte, Potenzen, oder Quotienten sind, sind schon hinreichend, die eigentliche Natur der Differenzenrechnung einzusehen. Man sieht *zuerst*, daſs jede Function ihre eigene besondere Zunahme hat, und daſs man also rückwärts aus der Zunahme einer Function ganz sicher die Function selbst herleiten kann, z. B. aus der Zunahme $\Delta z = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$ (8.) folgt klar, daſs hier $z = x^3$ ist, jedoch bleibt es für sich unbestimmt, ob der Function, aus welcher die Zunahme Δz erzeugt ist, noch gewisse beständige Gröſsen zu addiren, oder zu subtrahiren sind, oder nicht (5.), und dieses kann daher nicht anders, als aus den besondern Eigenschaften derjenigen Gröſsen ausgemittelt werden, zu welcher die Function gehört.

11.

Zweytens ist klar, wenn die Zunahmen der veränderlichen Gröſsen beträchtlich sind, in der Zunahme der Function selbst kein Glied als unbedeutend weggelassen werden kann, und daſs in diesem Falle, bey Functionen, deren Gleichung nur etwas zusammengesetzt ist, die Gleichung ihrer Zunahme schon sehr weitläuftig wird. Soll daher die Differenzenrechnung den Vortheil verschaffen, daſs man die eigentliche Natur der Zunahme einer Function im Wesentlichen bequem überschauen kann; so muſs man für jede Function die Zunahme ihrer veränderlichen Gröſsen so klein annehmen, daſs sie gegen letz-

tere selbst beynahe in keine Betrachtung kommen, z. B. in der Gleichung: $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ (8.) kommt der Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ dem Werthe von $2x$ immer näher, ein je kleinerer Theil von x die Zunahme Δx ist. Gesetzt nun Δx wäre der trillionste Theil von x; so würde er wenigstens *in praxi* gegen x schon als o anzusehen seyn, mithin $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2x$, und $\Delta z = 2x \cdot \Delta x$ werden. Eben so würde in diesem Falle in der Gleichung $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$ nicht nur Δx, sondern um so mehr Δx^2 gegen x als o anzusehen seyn, folglich $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x$, mithin $\frac{\Delta z}{3x \cdot \Delta x} = x + \Delta x = x$, also $\Delta z = 3x^2 \cdot \Delta x$ werden. Nun kann man zwar die Zunahme Δx von x ins Unendliche fort noch immer kleiner, z. B. als den Decatillionsten, centillionsten Theil von x u. s. w. annehmen, allein so lange dieselbe noch als ein bestimmter Theil von x, und nicht gegen x mit Recht als eine wahre Null angesehen werden kann; so würde die auf diese Art abgekürzte Zunahme Δz der Function z doch immer nur *beynahe*, nicht aber im strengen mathematischen Sinne des Worts, *genau* wahr seyn. Ich will jetzt noch unentschieden lassen, ob *Leibniz* die Zunahmen der veränderlichen Gröfsen gegen letztere als wahre Nullen, oder nur als kleine Gröfsen, die gegen sie in keine Betrachtung kämen, angesehen wissen wollte. Genug, er wagte es, dieselben als Nullen zu *behandeln*, und auf dieser Ansicht der Sache seine Differentialrechnung wirklich aufzubauen, die mithin ihrem Endzweck nach nichts anders, als *die im höchst möglichen Grade abgekürzte* Differenzenrechnung ist.

12.

Die Differentialrechnung ist also die Wissenschaft für die Zunahme einer jeden gegebenen Function aus der Zunahme ihrer veränderlichen Gröfsen diejenige Gleichung zu finden, welche entsteht, wenn man die Zunahmen der letztern alle als Nullen ansieht, mithin

auch das *Verhältnifs* der Zunahme der Function zur Zunahme ihrer veränderlichen Gröfsen in diesem Zustande zu finden. Die Zunahmen der veränderlichen Gröfsen in dem Zustande betrachtet, da man sie in Nullen verwandelt, heifst das *Differential* der Gröfsen, und man bezeichnet sie, um sie kennbar zu erhalten, dadurch, dafs man die Gröfse statt des △ ein d vorsetzt, z. B. dx heifst das Differential von x; dy das Differential von y u. s. w., und da, wenn die Zunahme der veränderlichen Gröfse Null wird, auch die Zunahme der Function selbst Null wird; so nennt man auch die Zunahme der Function in diesem Zustande betrachtet, das *Differential* derselben. Das Differential einer Function finden, heifst sie *differentiiren*. Also ist die Differentialrechnung kurz ausgedrückt, die Wissenschaft, eine jede gegebene Function zu differentiiren, oder ihr Differential, mithin auch das Verhältnifs ihres Differentials zum Differential einer jeden ihrer veränderlichen Gröfsen zu finden. Da nun das Differential der Function allemal Null ist; so ist zugleich von selbst klar, dafs es der Differentialrechnung gar nicht um die Bestimmung der *Gröfse*, oder des *Werths* des Differentials der Function, sondern lediglich um die Gleichung zu thun ist, durch welche dasselbe theils selbst, theils sein Verhältnifs zu den Differentialen ihrer veränderlichen Gröfsen ausgedrückt wird.

13.

Da jede Function ihre besondere Zunahme hat (10.); so hat sie auch ihr besonderes Differential. Also läfst sich rückwärts aus dem Differential einer Function die Function selbst herleiten; z. B. wenn $dz = 3x^2 dx$ ist; so ist $z = x^3$, denn die Gleichung für dz entsteht aus keiner andern Function von z, als wenn $z = x^3$, nur bleibt es, da im Differential von z die beständigen Gröfsen, die in der Gleichung für z als *addirt* oder *subtrahirt* vorkommen, alle wegfallen, und daher nicht nur wenn $z = x^3$, sondern auch wenn $z = x^3 + a - b$ ist, dasselbe Differential $dz = 3x^2 dx$ entsteht, an sich unbestimmt, ob zu der Function z noch gewisse Gröfsen zu addiren oder zu subtrahiren sind. Auf diese Art entsteht aus der Differentialrechnung unmittelbar eine neue Wissenschaft, welche Leibniz die *Integralrechnung* nannte, und die also nichts anders ist, als die Wissenschaft, aus jedem gegebenen

Differential einer Function die Function selbst zu finden. Die Function, aus deren Differentiirung das Differential entsteht, nennt man nämlich das *Integral* des letztern, und damit man dasselbe als Summe unendlich vieler solcher Differentiale ansehe; so bezeichnet man es gewöhnlich dadurch, dafs man vor das Differential den Buchstaben $\int$ setzt. Z. B. wenn $dz = 3x^2 dx$ ist; so drückt man das Integral von dz durch $\int 3x^2 dx$ aus. Das Integral eines Differentials finden, heifst das letztere *integriren*, und so ist die Integralrechnung die Wissenschaft gegebene Differentiale zu integriren. Da also die Integralrechnung nichts anders, als die umgekehrte Differentialrechnung ist; so ist klar, dafs die Gründlichkeit der erstern lediglich auf der Gründlichkeit der letztern beruht, und daher, wenn jene fest stehen soll, man zuvor versichert seyn mufs, dafs das Fundament von dieser fest sey.

14.

Da das Differential einer Gröfse gegen diese als eine Null behandelt wird, die zur Gröfse selbst addirt, oder von ihr subtrahirt, sie weder vermehrt noch vermindert, mithin $x + dx = x$, $y + dy = y$ u. s. w. ist; so läfst sich das Differential einer Function aus der Gleichung für die Zunahme derselben, dergleichen No. 5 — 9 gefunden werden, leicht herleiten.

Wenn nämlich $z = ax$ ist; so ist $dz = adx$

Wenn $z = ax + bz - cv + g - f$ ist; so ist $dz = adx + bdz - cdv$.

15.

Wenn $z = xy$ ist; so ist $dz = ydx + xdy$. Denn da hier

$\frac{dz}{dx} = y + dy + \frac{xdy}{dx}$ (7.) und $y + dy = y$ (14.); so ist

$\frac{dz}{dx} = y + \frac{xdy}{dx}$, also $dz = ydx + xdy$.

16.

Wenn daher $z = x^2$ ist; so ist $dz = 2xdx$, folglich wenn $z = x^3 = x^2 . x$; so ist $dz = x d . x^2 + x^2 dx = 2x^2 dx + x^2 dx$, also $dz = 3x^2 dx$. Ist $z = x^4 = x^3 . x$; so ist $dz = x d . x^3 + x^3 dx = 3x^3 dx$

$+x^3 dx$, also $dz = 4x^3 dx$, und so ist klar, daſs, wenn n eine ganze Zahl ist, überhaupt $d.x^n = nx^{n-1} dx$ ist. Auf diese Art läſst sich das Differential einer jeden Potenz, deren Exponent eine ganze Zahl ist, ganz leicht finden, ohne daſs man erst den binomischen Lehrsatz voraussetzen darf.

17.

Wenn $z = x^{\frac{r}{m}}$; so ist $z^m = x^r$, folglich $d.z^m = d.x^r$, mithin $mz^{m-1} dz = rx^{r-1} dx$. Nun ist $z^{m-1} = \frac{z^m}{z} = \frac{x^r}{x^{\frac{r}{m}}} = x^{r-\frac{r}{m}}$, folglich $m\, x^{r-\frac{r}{m}} dz = rx^{r-1} dx$, mithin $dz = \frac{r\, x^{r-1} dx}{m\, x^{r-\frac{r}{m}}} = \frac{r}{m}\, x^{\frac{r}{m}-1} dx$, also $d.x^{\frac{r}{m}} = \frac{r}{m} . x^{\frac{r}{m}-1} dx$. Mithin ist allemal $dx^n = nx^{n-1} dx$, der Exponent n mag eine ganze Zahl, oder eine gebrochene $\frac{r}{m}$ seyn.

18.

Wenn $z = \frac{x}{y}$ ist; so ist $dz = \frac{ydx - xdy}{(y+dy)\,y}$ (9.), also $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

19.

Ist daher $z = \frac{1}{y}$; so wird $x = 1$, folglich $dx = 0$ (5.), also ist $d.\frac{1}{y} = -\frac{dy}{y^2}$ (18.).

20.

Wenn daher $z = x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ ist; so ist $dz = -\frac{rx^{r-1}\, dx}{x^{2r}}$ (19.) $= -rx^{(-r)-1} dx$, mithin $d.x^{-r} = -r.x^{(-r)-1} dx$. Also ist ganz allgemein $d.x^n = nx^{n-1} dx$, der Exponent n mag eine ganze, oder gebrochene, eine positive, oder negative Zahl seyn.

21.

1. Wenn daher $z = ax$ ist; so ist $\frac{dz}{dx} = a$ (14.).

2. Ist $z = xy$; so ist $\frac{dz}{dx} = y + \frac{x\,dy}{dx}$, und $\frac{dz}{dy} = x + \frac{y\,.\,dx}{dy}$ (15.).

3. Ist $z = x^n$; so ist allgemein $\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$ (1. 2. 3.).

4. Ist $z = \frac{x}{y}$; so ist $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} . \frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} . \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2}$ (18.).

5. Ist $z = \frac{1}{y}$; so ist $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2}$ (19.).

Man sieht also hieraus nicht nur, wie leicht sich die Differentialen und Differentialverhältnisse für alle Grundfunctionen, nämlich für Producte, Quotienten und Potenzen finden lassen, sondern auch wie kurz und bequem ihre Gleichungen sind.

22.

Alle diese Gleichungen für die Differentialen und ihre Verhältnisse aber sind, wie bereits (13.) bemerkt worden, blofs unter der Bedingung strenge richtig, wenn das Differential einer jeden Gröfse gegen diese im strengen Sinne des Worts *Null* ist, so dafs im strengsten Sinne, z. B. $x + dx = x$, $x - dx = x$, und daher auch $x + dx = x - dx$, und $a\,dx = 0$ ist. Ist aber das Differential einer Gröfse gegen *diese* im strengsten Sinne Null, so mufs dasselbe auch gegen jede andere gleichartige Gröfse im strengsten Sinne Null seyn, z. B. wenn dx gegen x Null ist; so mufs dx auch gegen y Null seyn. Denn ist $y \lessgtr x$; so ist der Satz von selbst klar. Ist aber $y \gtrless x$, folglich $y = x + a$; so ist, wenn $x + dx = x$ ist, $y = x + dx + a$, folglich $y - dx = y$, und $y = y + dx$, mithin dx auch gegen y im strengsten Sinne Null. Also ist jedes Differential nicht nur relativ gegen diese oder jene Gröfse, sondern *absolut* und *schlechthin* im strengsten Sinne Null. Dieses ist der *erste* Punkt, der als unwidersprechlich gewifs vorausgesetzt werden mufs, wofern die Differentialrechnung, nicht

blofs beynahe, sondern im strengsten Sinne wahr seyn soll. Denn wäre dieser zweifelhaft; so wäre an keine Rettung dieser erhabenen Wissenschaft wider den verkleinernden Vorwurf der Ungründlichkeit zu denken. Wenn man daher in einer Differentialgleichung nach ihrem eigentlichen *Werthe* frägt; so setzt dieselbe nichts weiter, als $0=0$. So bedeutet die Gleichung $d.x^2=2xdx$ (16.), dem Werthe nach nichts weiter, als $0=2x.0=0$, und die Gleichung $d.xy=ydx+xdy$ (15.) nichts weiter, als $0=y.0+x.0=0$, und man sieht also, dafs, da dieses von allen Differentialgleichungen allgemein gilt, die Frage nach dem *Werthe* derselben, in der Differentialrechnung gar nicht weiter in Betrachtung kommt; sondern die wahre Nachfrage ist hier vielmehr diese; *welches ist die Grenze, welche die Zunahme einer jeden Function zum wenigsten überschreiten mufs, wenn ihre veränderliche Gröfse, um einen auch noch so kleinen endlichen Theil zunimmt?* So zeigt die Gleichung $d.x^2=2xdx$ an, dafs wenn x um einen noch so kleinen, aber *endlichen* Theil dx wächst, das Quadrat von x zum wenigsten um mehr als $2xdx$ wachsen mufs, z. B. wenn die Zahl 4 um $\frac{1}{100}$ wächst; so mufs ihr Quadrat zum wenigsten um mehr als um $\frac{8}{100}$ wachsen, und dieses *mehr* beträgt (No. 8.), das in der Differentialgleichung weggelassene $\frac{1}{100^2}$, oder $\frac{1}{10000}$. Eben so zeigt die Gleichung $d.xy=ydx+xdy$ die Grenze an, die das Wachsthum des Products nothwendig überschreiten mufs, sobald die Factoren x, y um einen gegebenen noch so kleinen Theil zunehmen. Z. B. wenn $x=3$, $y=5$, und x um 2, y um 1 wächst; so mufs das Product 15 um mehr als $5.2+3.1$, d. i. um mehr als 13 wachsen, und dieses *mehr* beträgt (7.), das in der Differentialgleichung weggelassene Product 2.1 oder 2. Da man nun die Zunahme der veränderlichen Gröfse kleiner annehmen kann, als jede gegebene Gröfse, so kann man auch sagen, dafs das Differential einer Function ihre *Anfangsveränderung* anzeigt, d. i. diejenige, die mit ihr vorgeht, indem die veränderliche Gröfse sich zu verändern *anfangt* oder *aufhört*. Hieraus ist zugleich klar, dafs, obgleich die Differentialen wahre Nullen sind, es dennoch zum *Wesen* der Differentialrechnung gehört, dafs man sie nicht durch Nullen *ausdrückt*, sondern jedes Differential so bezeichnet, dafs man weifs, zu welcher Gröfse es gehört,

z. B. nach *Leibniz* durch dx, und nach *Newton* durch $\dot{x}$, weil sonst aller Unterschied zwischen den Differentialgleichungen wegfiele, und daher alle Bemühung, sie zu finden, ungereimt wäre, indem man schon zum voraus weifs, dafs sie in Rücksicht ihres Werthes, für jede Function $o = o$ ist.

23.

Sind aber die Differentialen keine Gröfsen, sondern im strengsten Sinne blofse Nullen; so folgt von selbst, dafs auch jedes Differentialverhältnifs nichts anders, als ein wirkliches *Nullenverhältnifs*, und daher im wahren Sinne $\frac{dz}{dx} = \frac{o}{o}$ ist. Dieses ist also der *zweyte* Punkt, der aber so wie der erste, als unwidersprechlich gewifs fest stehen mufs, wenn die Differentialrechnung auf einem festen Grunde ruhen soll. Allein obgleich jedes Differentialverhältnifs $\frac{dz}{dx}$ ein wahres Nullenverhältnifs $\frac{o}{o}$ ist, so folgt hieraus dennoch gar nicht, dafs auch der Exponent desselben Null, und daher $\frac{o}{o} = o$ sey, sondern die Differentialverhältnisse lehren vielmehr selbst, dafs ihr Exponent entweder eine *endliche*, sowohl beständige als veränderliche Gröfse, oder *Null*, oder gar unendlich grofs seyn kann. So ist, wenn $z = ax$ ist, $\frac{dz}{dx} = a$ (21. 1.). mithin auch $\frac{o}{o} = a$, also der Exponent der beständigen Gröfse a gleich. Ist $z = x^n$; so ist $\frac{dz}{dx} = \frac{o}{o} = n\,x^{n-1}$, mithin einem veränderlichen Producte gleich. Ferner ist aus der Differentialrechnung bekannt, dafs wenn die Function z von x ein *Gröfsestes* oder *kleinstes* seyn soll, $\frac{dz}{dx}$ entweder $= o$, oder $= \infty$ seyn mufs. Z. B. In der Gleichung für den Kreis $y^2 = ax - x^2$ ist, wenn man $y^2 = z$ setzt, $dz = adx - 2xdx$, folglich $\frac{dz}{dx} = a - 2x$. Setzt man hier $\frac{dz}{dx} = o$; so ist $x = \frac{1}{2}a$, und setzt man $x = \frac{1}{2}a$; so ist $\frac{dz}{dx} = o$. Man

setze ferner $z = a + a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$; so ist $dz = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx$, folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{2\, a^{\frac{1}{3}}}{3\, x^{\frac{1}{3}}}$. Setzt man hier $x = 0$; so wird $\frac{dz}{dx} = \frac{2\, a^{\frac{1}{3}}}{0} = \infty$.

Da also der Exponent des Differentialverhältnisses $\frac{dz}{dx}$ entweder eine endliche Gröſse, oder Null, oder unendlich groſs seyn kann; so muſs dieses auch schlechterdings vom Exponenten des Verhältnisses $\frac{0}{0}$ gelten, wofern der Grund, auf welchem die Differentialrechnung ruht, fest seyn soll, und man sieht zugleich, daſs in dem Verhältnisse $\frac{d.xy}{dx} = y + x.\frac{dy}{dx}$ (21. 2.) der Quotient $\frac{dy}{dx}$ eine endliche oder unendliche Gröſse, oder auch o bedeuten kann. Der wahre Zweck der Differentialrechnung ist also der, das *Grenzverhältniſs* zu wissen, welches das Verhältniſs des Wachsthums der Function zum Wachsthum ihrer veränderlichen Gröſse zum wenigsten übersteigen muſs, wenn letztere auch um einen noch so kleinen endlichen Theil wächst. So zeigt z. B. das Verhältniſs $\frac{d.\,x^2}{dx} = 2\,x$ an, daſs wenn x auch um einen noch so kleinen endlichen Theil wächst, das Verhältniſs des Wachsthums des Quadrats x^2 zum Wachsthum der Wurzel x allemal gröſser seyn muſs, als das Verhältniſs $2\,x : 1$, weil es nur in dem Falle $= 2\,x : 1$ seyn kann, wenn das Wachsthum von $x = 0$ ist. Eben daher kann man das Verhältniſs der Differentialen $\frac{dz}{dx}$ auch das *Anfangs-Verhältniſs* der Zunahme der Function zur Zunahme ihrer veränderlichen Gröſsen, imgleichen ihr *erstes* und *letztes* Verhältniſs nennen, in welchem sie stehen, wenn x sich zu verändern anfängt oder aufhört.

24.

Der erste Punkt, daſs die Differentiale keine Gröſsen, sondern bloſse Nullen seyn müssen, wofern die Differentialrechnung strenge wahr seyn soll, würde für sich keine Schwierigkeit machen, indem es nicht nur in unserer Willkühr steht, sie als Nullen zu setzen, son-

dern auch jedesmal dem *Werthe* nach die richtige Gleichung entsteht o = o (22.). Allein da hieraus von selbst folgt, dafs auch das *geometrische Verhältnifs* zweyer Differentialen kein *Gröfsen*-, sondern ein blofses *Nullen - Verhältnifs* ist; so entsteht nun die schwierige Frage: wie können *blofse Nullen im geometrischen Verhältnifs stehen?* wie kann z. B. zwischen den Seiten eines Dreyecks noch ein Verhältnifs statt finden, wenn man sie alle in geometrische Punkte, mithin in wirkliche Nullen verwandelt? Heifst das nicht eben so viel, als behaupten, dafs die eine Null nicht nur so vielmal als man will, sondern sogar unendlich vielemal gröfser seyn kann, als die andere, und so auch ein Punct den andern unendlich vielemal an Gröfse übertreffen kann; da doch die Null so wenig, als der Punkt, eine Gröfse hat? Also steckt der Knoten, von dessen Auflösung die Gründlichkeit der Differentialrechnung abhängt, blofs im *zweyten* Punkte (23.): *wie* nämlich die *Differentialverhältnisse* ohne Widerspruch blofse *Nullenverhältnisse* seyn können? Diese Schwierigkeit theilte die Vertheidiger der Differentialrechnung in zwey Hauptpartheyen, die eine konnte sich nicht entschliefsen, die Differentiale für blofse Nullen, oder Punkte zu halten, sondern stellte sich dieselben als wirkliche Gröfsen vor, aber so klein, dafs sie gegen jede *endliche* Gröfse als Nullen zu betrachten wären. Die andere hingegen hielt sie zwar für blofse Nullen, leugnete aber, dafs sie in einem geometrischen Verhältnisse stehen können. Jene glaubten sich also berechtigt, den ersten Punkt (22.), und diese den zweyten (23.) für unnöthig zu erklären.

25.

Um die Möglichkeit zu zeigen, dafs sich Gröfsen denken liefsen, die gegen jede endliche Gröfse völlig als Nullen anzusehen wären, gab man ihnen gewöhnlich den Namen *unendlich kleiner Gröfsen*, nur war man leider bis auf den heutigen Tag sehr uneins, was man sich unter denselben eigentlich vorstellen soll, Gewöhnlich erklärt man sie durch solche *Gröfsen*, die kleiner sind, *als jede Gröfse*, *die sich angeben* läfst. In dieser Definition aber begeht man schon den logischen Erschleichungsfehler, dafs man das, was man sich kleiner als jede angebliche Gröfse denkt, auch schon eine Gröfse nennt, ohne

erst zu untersuchen, ob es den Namen einer Gröſse verdient, oder ob nicht der ganze Begriff einer *unendlich kleinen Gröſse* widersprechend und ohne alle Realität ist. Logisch richtig müſste also die Definition so heiſsen: *unendlich klein* heiſst dasjenige, was kleiner ist, als jede angebliche Gröſse, ohne es schon voraus zu bestimmen, ob das Unendlich kleine etwas reales oder nichts ist. Zu diesem Begriff des Unendlichkleinen wird der menschliche Geist durch die Geometrie und Mechanik allerdings ganz von selbst geleitet. Schon der Begriff der Stetigkeit, ohne welche sich keine geometrische Gröſse, noch irgend eine Bewegung denken läſst, führt auf denselben unvermeidlich. Man setze z. B. ein Punkt *P* bewege sich durch eine noch so kleine oder endliche Linie *AB*; so muſs er, wenn er nach *B* kommen soll, erst durch alle die unzähligen Punkte, die zwischen *A* und *B* liegen, und daher aus dem ersten Punkt *A* durch den nächsten *C*, aus diesem durch den nächsten *D* u. s. w. Nun ist zwischen zwey Punkten, die sich angeben lassen, allemal eine gerade Linie möglich, zwischen 2, 3, 4, und mehreren *nächsten* Puncten aber läſst sich, so lange ihre Anzahl noch endlich ist, gar keine Linie *angeben*. Also scheint es, daſs man zwischen den beyden Endpunkten einer jeden noch so kleinen endlichen Linie *AB* unendlich viele Linien annehmen müſse, die sich gar nicht angeben lassen, die eben daher gegen *AB* in gar keine Betrachtung kommen, und zur Linie *AB* addirt oder subtrahirt, sie weder vermehren noch vermindern, unter sich selbst aber, sofern sie *mehrere* oder *wenigere* Punkte enthalten, allerdings *gröſser* oder *kleiner* seyn können. Läſst sich aber von diesen Linien keine *angeben*; so läſst sich um so weniger ein Zwischenpunkt zwischen ihnen angeben, mithin muſs man sich diese unendlich kleine nicht angebliche Linie zugleich als *untheilbar*, und daher jede endliche theilbare Linie als aus unendlich vielen *untheilbaren* Linien zusammengesetzt denken. So dachten sich dieselbe schon *Demokrit* und *Leucipp*, und da in den neuern Zeiten nach der Wiederaufblühung der Wissenschaften *Cavalleri* einsahe, wie ungemein durch diese Vorstellung die einen so langen Umschweif von Worten erfordernden Demonstrationen des Archimedes und seiner Nachfolger sich abkürzen, und die mathematischen Erfindungen erleichtern lieſsen, so erneuerte er in seiner *Geometria indivisibilibus continuorum noua quadam ratione*

promota, *Bononiae* 1653. diesen Begriff von *untheilbaren* Linien, mithin auch von untheilbaren Flächen und Körpern. Indessen ist leicht einzusehen, dafs diese vermeinten unendlich kleinen und untheilbaren Linien gar nicht als wahre Linien denkbar sind, sondern als blofse *Punkte* gedacht werden müssen. Denn jede Linie ist *ausgedehnt*, und zwar im niedrigsten Grade, nämlich blofs nach der Länge. Jedes Ausgedehnte aber hat seinem Begriffe nach *Theile*, die *aufserhalb* einander liegen, und ist daher *theilbar*. Also sind untheilbare Linien ein offenbarer Widerspruch, und da nun jede *nicht angebliche oder unendlich kleine* Linie nothwendig als untheilbar gedacht werden mufs; so ist auch letztere ein Widerspruch.

26.

Aufserdem wird der Geometer auf den Begriff des Unendlichkleinen selbst wider seinen Willen geführt, sobald er die *krummen* Linien mit geraden vergleichen will. Da kein Bogen einer Curve, so klein er auch angenommen wird, seiner Sehne gleich seyn kann, so lange er noch *endlich* ist, und sich angeben läfst; so mufs er, wofern er sich Bogen denken will, die ihren Sehnen gleich sind, beyde nothwendig als etwas denken, was kleiner ist, als jede angebliche Linie. Allein das erstere mufs er schlechterdings wollen, wenn er z. B. den Kreis einem in ihm oder um ihn beschriebenen regulairen Polygon gleich setzen will, denn in diesem Falle mufs er jeden Bogen des Kreises der correspondirenden Seite des Polygons, als seiner Sehne gleich setzen. Dafs schon Archimedes sich den Kreis als ein Unendliches vorgestellt hat, ist unverkennbar, indem er denselben als diejenige Grenze ansahe, welcher zwey ähnliche Vielecke, deren das eine im Kreise, und das andere um ihn beschrieben wird, sich desto mehr nähern, je gröfser die Anzahl ihrer Seiten ist, folglich, wenn man sich beyde als gleich vorstellt, mit dem Kreise, als ihrer Grenze zusammenfallen, und so mit demselben ganz einerley sind. Dieses erhellt noch mehr aus seinem Satze, dafs die Kreisfläche der Fläche eines Dreyecks gleich ist, das die Peripherie zur Grundlinie, und den Halbmesser zur Höhe hat, letzteres aber einem um den Kreis beschriebenen regulairen Vieleck gleich ist, das einen der Peripherie des Kreises gleichen Perimeter und den Halbmesser des Kreises zur Höhe hat.

Ja selbst dem noch strengern *Euklid* scheint sich diese Vorstellung bereits aufgedrungen zu haben. Denn wenn er im ersten Satze des zwölften Buchs seiner Elemente zeigt, dafs alle ähnliche im Kreise beschriebene regulaire Vielecke sich wie die Quadrate der Durchmesser von letztern verhalten, und im zweyten Satze daraus, weil diese Vielecke sich ihren Kreisen immer stärker nähern, je gröfser die Zahl ihrer Seiten ist, beweiset, dafs dieses Verhältnifs auch den Kreisflächen selbst zukommen mufs, und daher auch die Kreise selbst sich, wie die in ihnen beschriebenen Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten müssen; so ist wohl kein Zweifel, dafs blofs die Vorstellung, der Kreis sey als ein regulaires Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehen, ihn, oder wer schon vor ihm der Erfinder des zweyten Satzes gewesen seyn mag, auf diesen Satz geleitet habe.

Eben diese Vorstellungsart ist es auch unstreitig, durch welche Leibniz auf die ganze Erfindung der Differentialrechnung geleitet worden. Denn in der Abhandlung, in welcher er die Grundzüge derselben in den *Actis Erud.* 1684. *mensis Octobris* zuerst bekannt machte, sagt er S. 470, wo er sich über den eigentlichen Sinn seiner zuerst auf die Ziehung der Tangenten angewandten Differentialen erklärt, ausdrücklich: *) Die *Tangente* finden heifst: „eine gerade Linie ziehen, „welche zwey in einer unendlich kleinen Distanz von einander abstehende Punkte der Curve verbindet, oder die verlängerte Seite des „*Unendlichecks* ziehen, welches ich mit der *Curve* als *gleichgeltend* „ansehe. Eine unendlich kleine Distanz aber läfst sich jederzeit durch „eine gewisse bekannte Differentialgröfse, z. B. dv durch eine Beziehung auf diese, d. i. durch eine gewisse bekannte Tangente ausdrücken."

So unvermeidlich aber auch dem Geometer, wenn er die krummen Linien mit den geraden vergleichen will, die Vorstellungsart ist,

*) Tenentur in genere, *tangentem* invenire, esse rectam ducere, quae duo curvae puncta distantiam infinite parvam habentia jungit, seu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curvae* aequiualet. Distantia autem illa infinite parva semper per aliquam differentialem notam, ut dv, vel per relationem ad ipsam exprimi potest, hoc est per notam quandam tangentem.

die Curve als in unendlich viele Bogen getheilt anzusehen, um jeden dieser Bogen seiner Sehne oder Tangente gleich setzen zu können; so ist dennoch der Widerspruch, in den man sich verwickelt, klar, wenn man dergleichen unendlich klein genannte Bogen noch für wirkliche *Linien* halten wollte. Denn da der wesentliche Unterschied zwischen einer krummen und geraden Linie eben darinn besteht, daſs von jener kein Theil gerade ist; so würde man den ganzen Begriff einer Curve aufheben, wenn man irgend einen *Theil* von ihr, sey er endlich oder unendlich klein, für gerade halten, und daher den Bogen, der mit seiner Sehne oder Tangente als einerley betrachtet wird, noch für einen wirklichen Theil der Curve, mithin für eine wirkliche *Linie* oder *ausgedehnte Gröſse* halten wollte, ohne an die Ungereimtheit zu denken, daſs man sich dergleichen Linien als aus einer *endlichen* Zahl von *nächsten* Punkten zusammengesetzt denken muſste. *Leibniz* selbst war daher, wie schon Wolf in seinen *Elementis Analyseos Infinitorum* §. 5. anmerkt, weit entfernt, diese unendlich kleine Bogen Tangenten und Sehnen für *reale Gröſsen* auszugeben. Überzeugt, daſs der Geometer zu dieser Vorstellungsart ohne alle Gefahr zu irren, berechtigt ist, und bey der Hauptabsicht, die er hatte, durch die Differentialrechnung bloſs die mathematischen Erfindungen im höchst möglichen Grade zu erleichtern, lieſs er sich nicht weiter in den Begriff des Unendlichen kleinen ein, sondern erklärte sich in den *Actis Erud.* 1712. pag. 268 über den Gebrauch dieses Wortes vielmehr ausdrücklich: *commoditati expressionis seu breviloquio m e n t a l i inservimus, sed non nisi t o l e r a n t e r vera loquimur, quae explicatione r i g i d a n t u r.* Hieraus sieht man zugleich, daſs es nicht *Erklärung*, sondern bloſse *Erläuterung* seyn soll, wenn er zum Beyspiel, wie man verschiedene Grade des Unendlichkleinen annehmen könne, anführt, daſs der Durchmesser eines Sandkorns, gegen die Höhe des Berges, diese gegen den Durchmesser der Erde, letzterer gegen den Durchmesser der Erdbahn, und dieser gegen die Weite der Fixsterne, als unendlich klein angesehen werden kann. Da indessen diese für die in der praktischen Geometrie und Astronomie erreichbare Schärfe vollkommen passende Vorstellung, die in der Differentialrechnung erforderliche streng geometrische Schärfe durchaus aufheben würde; so sollte man sich hier jenes Beyspiels gänzlich enthalten. Wenn aber *Wolf* a. a. O.

sich desselben sogar zur Warnung bedient, dafs man die Differentialen nicht als absolute, sondern blofs als relative Nullen ansehen soll; so steht er mit sich selbst im Widerspruch, wenn er sie gleichwohl nicht für reale Gröfsen gehalten wissen will.

27.

Vorzüglich aber ist es die Bestimmung der *ungleichförmigen* Bewegung, die den Mathematiker auf die Idee des Unendlichkleinen unvermeidlich führt. Denn diese ist nicht anders möglich, als dafs man sich gewisse gleiche Theile der Linie vorstellt, die der bewegte Punkt in eben so viel gleichen Zeittheilchen *gleichförmig* durchläuft, so dafs die Zunahme der Geschwindigkeit erst jedesmal am Ende eines solchen Zeittheilchens anfängt. Soll aber dieses bey einer wirklich ungleichförmigen Bewegung möglich seyn, so müssen nicht nur diese Theilchen der Linie kleiner, als jede *angebliche Linie*, sondern auch jedes solches Zeittheilchen kleiner als jedes *angebliche Zeittheilchen*, mithin beydes unendlich klein gedacht werden. Diese Vorstellung liegt offenbar der Newtonschen Fluxionenrechnung zum Grunde. Denn die Fluxion ist die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punkt an jeder Stelle der Linie hat, und mit welcher er also seine Bewegung *gleichförmig* fortsetzen würde, wenn seine Geschwindigkeit unverändert bliebe. Soll diese aber beständig zunehmen; so mufs man, um diese Zunahme bestimmen zu können, nach jener Stelle eine ihr so nahe folgende annehmen, dafs letztere von der erstern ganz nicht zu unterscheiden ist, und daher die Linie zwischen ihnen kleiner, als jede angebliche ist, damit man sich die Bewegung bis zur zweyten Stelle als vollkommen gleichförmig, und die Vermehrung der Geschwindigkeit so ansehen kann, als ob sie erst in der zweyten Stelle erfolgte. Es ist also klar, dafs die Fluxionenrechnung eben so unvermeidlich auf die Idee des Unendlichkleinen führt, als die Differentialrechnung, und dafs also, wenn dieses nicht eine absolute Null, sondern eine wirkliche Gröfse vorstellen sollte, beyde Wissenschaften in Rücksicht der Gründlichkeit sich in gleicher Lage befinden würden (22.), so sehr auch Kästner in Rücksicht der Gründlichkeit der Fluxionenrechnung den Vorzug vor der Differentialrechnung zu geben scheint.

28.

Aus allen diesen zeigt sich schon, dafs, so unvermeidlich auch die Mathemathik auf die Idee des Unendlichkleinen führt, man sich dennoch in den offenbarsten Widerspruch verwickeln würde, wenn man darunter nicht eine absolute Null, sondern eine wirkliche Gröfse denken wollte. Schon der Begriff selbst zeigt dieses deutlich. Denn was kleiner ist als jede angebliche Gröfse, das ist als Gröfse gar nicht angeblich, und sagt das nicht eben so viel, als gar nicht *denkbar?* Allein der Widerspruch, sich das Unendlichkleine als Gröfse zu denken, läfst sich mit der gröfsesten Schärfe beweisen. Denn wenn man eine Gröfse in noch so viele gleiche Theile theilt; so ist, so lange die Menge dieser Theile endlich ist, ein jeder derselben noch ein angeblicher Theil, z. B. der trillionste, centillionste, mithin ist jeder *endlichvielste* Theil einer Gröfse, eine angebliche, d. i. *endliche* Gröfse. Soll daher eine Gröfse kleiner seyn, als jede *angebliche* oder *endliche* gleichartige Gröfse; so mufs er ein *unendlichvielster*, d. i. ein solcher Theil derselben seyn, der *unendlich vielemale* genommen, die endliche Gröfse als das Ganze erzeugt. Allein einen Theil *unendlich vielmal* nehmen, heifst ihn immerfort wiederholen, ohne mit der Wiederholung jemals *aufzuhören*, folglich die zu erzeugende Gröfse *nie* begrenzen, mithin keine begränzte oder endliche Gröfse geben, sondern eine unendliche zu erzeugen streben. Also ist ein unendlichvielster *Theil* einer *endlichen* Gröfse ein Theil, der unendlich vielmal genommen, die *endliche* Gröfse *nicht* giebt, mithin ein sich selbst widersprechender Theil. Soll daher ein unendlichvielster Theil einer Gröfse ein endlicher Theil von ihr seyn; so findet dieses nicht anders statt, als wenn man die Gröfse selbst als unendlich grofs denkt. So ist z. B. jede Zahl ein unendlichvielster Theil einer *unendlichen Menge*, und jede endliche Linie ein unendlichvielster Theil einer *unendlichen Linie*, denn man mufs sowohl die Zahl, als die endliche Linie unendlich vielmal nehmen, um die unendliche Menge oder Linie zu erzeugen. Soll hingegen ein Theil, so klein er auch gedacht werden mag, durch mehrmaliges Wiederholen eine *endliche*, d. i. *völlig begrenzte* Gröfse erzeugen; so ist von selbst klar, dafs seine Wiederholung irgendwo aufhören oder begrenzt werden mufs, denn setzt man dieser keine Grenze, so kann auch die dadurch zu erzeugende Gröfse keine erhal-

ten, und so ist es unwidersprechlich gewifs, dafs jeder Theil einer endlichen Gröfse, so klein er auch gedacht werden mag, ein blofs *endlichvielster* Theil von ihr seyn kann, mithin ein *unendlich kleiner* Theil einer *endlichen* Gröfse, als Theil von ihr, d. i. als eine ihr *gleichartige Gröfse* gedacht, ein offenbarer Widerspruch ist. Richtig und unumstöfslich ist daher der Satz, *dafs jede Linie sich ins Unendliche theilen läfst*, denn da jeder Theil einer Linie selbst eine Linie, und jede Linie als ein Ausgedehntes theilbar ist; so ist jeder Theil einer Linie wieder theilbar, also kann man die Theilung beständig fortsetzen, ohne damit jemals aufhören zu dürfen, mithin ist es ein Widerspruch, diese Theilung je als bereits vollendet anzusehen. Wollte man hingegen sagen: *die Linie, vorausgesetzt dafs sie endlich ist, ist aus unendlich vielen Theilen zusammengesetzt;* so wäre dieses offenbar ungereimt, denn nun erklärte man das ohne Aufhören mögliche Theilen der Linie schon für bereits geschehen und vollendet, und wenn man rückwärts aus diesem dadurch erhaltenen unendlichvielsten Theil, welcher, wohl zu merken, als der durch ein *nie aufhörendes* und gleichwohl schon vollendetes, mithin wirklich *aufgehörtes* Theilen erhaltene letzte gedacht werden müfste, die getheilte Linie wieder zusammensetzen wollte; so müfste man, um zu ihrem Endpunkt zu gelangen, mit dem unendlichen, d. i. niemals aufhörenden Wiederholen desselben, gleichwohl wirklich einmal aufhören!

29.

Da sich also das Unendlichkleine gar nicht als ein *Theil* einer endlichen Gröfse, mithin durchaus nicht als eine ihr gleichartige *Gröfse* gedacht werden kann, weil er sonst ein *unendlichvielster*, d. i. widersprechender Theil von ihr seyn müfste, und die Idee des unendlichvielsten Theils, wie gezeigt worden, gleichwohl dem Mathematiker nicht nur unvermeidlich, sondern auch in der That von jeher die Mutter der wichtigsten Erfindungen gewesen ist; so ist klar, dafs dieselbe nichts anders, als eine blofse *Hevristische Fiction* ist, zu welcher aber der menschliche Geist, vermöge seiner Natur, sich nothwendig gedrungen fühlt, wofern seine Forschungen nicht sehr bald gänzlich gehemmt werden sollen. Allein da ein Theil einer endlichen Gröfse, sobald er als ein unendlichvielster erdichtet wird, gar nicht

mehr als *Theil*, mithin gar nicht mehr als gleichartige *Gröſse* gedacht werden kann; so folgt hieraus von selbst, daſs man sich unter demselben nichts anders, als bloſse *Grenze* oder *Anfang*, mithin nichts anders, als *Mangel* der Gröſse, und daher in Rücksicht dieser als ein wahres *Nichts* denken kann. Also ist der unendlichvielste Theil einer *Zahl* keine *Zahl*, sondern eine bloſse *Null*, der unendlichvielste Theil einer endlichen Linie keine Linie, sondern bloſs Punkt, der unendlichvielste Theil einer Fläche nicht Fläche, sondern bloſs Grenze von ihr, nämlich Linie, mithin als Fläche betrachtet, ein absolutes *Nichts*, der unendlichvielste Theil eines Körpers bloſs Fläche, mithin als Körper ein *absolutes Nichts*, und eben so ein unendlichvielster Theil einer Zeitdauer nicht Zeitdauer, sondern bloſs *Zeitanfang* oder *Zeitpunkt* u. s. w. Hieraus läſst sich nun zugleich die Idee berichtigen, die man sich gewöhnlich von dem sogenannten *Moment* einer Kraft, d. i. von derjenigen Gröſse derselben macht, mit welcher sie zu wirken *anfängt*. So fällt vermöge der Schwere jeder Körper auf der Erde in der ersten Zeitsecunde etwa 15 Fuſs. Allein da die Schwere in den Körper unaufhörlich wirkt; so nimmt der Fall während dieser Zeitsecunde in jedem Augenblicke zu, und ist daher am Ende derselben weit gröſser, als er am Anfange derselben war. Es entsteht also die Frage: durch welchen Theil von 15 Fuſs fällt er im Anfange? Die Bestimmung dieses Theils nennt man darum das *Moment* der Schwere auf der Oberfläche der Erde. Der *Mond* fällt nach der Erde in der ersten Zeitsecunde durch eine Linie, die etwa 3600 mal kleiner, als 15 Fuſs ist. Die Bestimmung, durch welchen Theil dieser Linie er im Anfange dieser Zeitsecunde fällt, nennt man eben so das *Moment* der Schwere in der Gegend des Mondes, und es scheint also, daſs das erste Moment weit gröſser, als das letztere, mithin jedes dieser Momente eine reelle Gröſse seyn müsse. Allein soll man sich ein dergleichen Moment denken, so muſs man einen Theil der Zeitsecunde als den *ersten*, und diesen so klein annehmen, daſs *während desselben* die Zunahme des Falls Null, und daher der Fall selbst vollkommen gleichförmig ist, mithin muſs der erforderte Zeittheil ein *unendlichvielster* Theil der Secunde, d. i. kein Zeittheil, sondern ein bloſser *Augenblick* oder *Zeitpunkt*, und die darin durchlaufene Linie, oder das *Moment* der Schwere, ein bloſser geometrischer *Punkt* seyn.

30.

Es läſst sich aber dieser Satz nicht bloſs durch discursive Schlüſse aus dem Begriff des Unendlichkleinen herleiten, sondern zugleich nach den Regeln der allgemeinen Arithmetik oder Gröſsenlehre, aufs strengste demonstriren. Wenn man nämlich die unendliche Menge $1+1+1+\ldots$ ohne Ende $=\infty$ setzt; so ist der unendlichvielste Theil einer jeden unendlichen Gröſse $a=\frac{a}{\infty}$, mithin $\frac{a}{\infty}=\frac{a}{1+1+1+1+\ldots}$.

Nun dividire man wie gewöhnlich:

$$\begin{array}{l} 1+1+1+1\ldots)\ a\ (a-a \\ \qquad\qquad\quad \underline{a+a+a+a+\ldots} \\ \qquad\qquad\quad -a-a-a-\ldots \\ \qquad\qquad\quad \underline{-a-a-a-\ldots} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Also ist von jeder endlichen Gröſse a ihr unendlichvielster Theil $\frac{a}{\infty}=a-a=0$, und hieraus folgt zugleich; daſs $\frac{a}{0}=\infty$, mithin jede endliche Gröſse durch 0 dividirt, unendlich groſs ist. Dieser zweyte Satz aber läſst sich mit gleicher Evidenz auch geradezu beweisen, und aus ihm folgt dann rückwärts der erste. Denn nach den Regeln der Division ist allgemein $\frac{a}{1-x}=a+xa+xa^2+x^3a+\ldots$, was für eine Zahl auch x seyn mag. Man setze also $x=1$; so ist $\frac{a}{0}=a+a+a+a+\ldots=\infty a$, also $\frac{a}{\infty}=0.a=0$.

Ist aber $\frac{a}{\infty}=0$; so muſs auch $a=0.\infty$ seyn, und dieses könnte man sagen, ist doch wohl eine ungereimte Behauptung, denn auch die unendliche Menge von Einern ∞ giebt 0 mal genommen, doch immer nur 0, aber keine Zahl, und noch weniger eine Gröſse a, die von einer andern Art, z. B. eine Linie, ein Gewicht etc. seyn kann, weil jedes Zahlenproduct selbst eine Zahl, und nicht eine andere Art Gröſse ist. Allein diese vermeinte Ungereimtheit fällt, wenn man

nur auf den wahren Sinn des Satzes Acht hat, nicht nur von selbst weg, sondern ist vielmehr die beste Bestätigung desselben. Denn in dem Satze $a = 0 . \infty$ würde offenbar unerlaubt seyn, die Null in einem andern Sinne zu nehmen, als den sie in dem Satze $\frac{a}{\infty} = 0$ hat, aus welchem der erstere $a = 0 . \infty$ hergeleitet worden. Man setze also in diesem $a = \frac{a}{\infty} . \infty$, so heifst der Satz $a = 0 . \infty$ so viel: wenn man den unendlichvielsten Theil einer Gröfse a unendlich vielmal nimmt; so hat man die Gröfse a selbst, und dieser Satz ist doch wohl richtig. Ich habe diese Bemerkung blofs beygefügt, um bey Anfängern vorzubauen, dafs wenn aus den Sätzen $\frac{a}{\infty} = 0$, und $\frac{a}{0} = \infty$ Widersprüche zu folgen scheinen, sie dieselben nicht voreilig für wirkliche Widersprüche halten, sondern fest überzeugt seyn können, dafs diese Widersprüche verschwinden, sobald man nur statt der vorkommenden Nullen die Ausdrücke $\frac{a}{\infty}$, $\frac{b}{\infty}$ u. s. w. setzt, aus welchen sie für den widersprechend scheinenden Satz gefolgert sind. So ist z. B. ganz richtig $\frac{1}{\infty} = \frac{12}{\infty} = 0$, folglich $\frac{1}{\infty} = \frac{12}{\infty}$, aber hieraus folgt gar nicht, dafs $1 = 12$, sondern da $\frac{1}{\infty} = 1 . 0$, und $\frac{12}{\infty} = 12 . 0$; so ist ganz richtig $1 . 0 = 12 . 0$, mithin auch $1 : 12 = 0 : 0$, oder $\frac{1}{12} = \frac{0}{0}$, (wie ich bald zeigen werde) imgleichen $\frac{1}{0} = \frac{12}{0}$, dafs aber auch dieser letzte Satz unter gewissen Einschränkungen in unzähligen Fällen richtig ist, habe ich in meiner Theorie des Unendlichen 8. 1788 unter andern §. 48. strenge bewiesen. Man sieht also hieraus, dafs wenn man mit den unendlichvielsten Theilen verschiedener Gröfsen a, b, c etc. rechnen will, dieselben, obgleich jede ihrem Werthe nach eine absolute Null, mithin dem Werthe nach allen übrigen gleich ist, gleichwohl von einander unterschieden, und jeden durch den eigenthümlichen Bruch ausdrücken mufs, denn seine Definition erfordert, näm-

lich: $\frac{a}{\infty}$, $\frac{b}{\infty}$, $\frac{c}{\infty}$ etc., und daſs, wenn man sie alle schlechthin durch dasselbe Zeichen o ausdrücken wollte, gar keine Rechnung mit ihnen möglich wäre. Beobachtet man diese Regel; so ist es unmöglich, daſs die Sätze $\frac{a}{\infty} = 0$, und $\frac{a}{0} = \infty$ auf irgend einen Widerspruch führen könnten, so scheinbar er auch seyn möchte. So kann z. B. wohl kaum ein Einwurf scheinbarer seyn, als derjenige, der mir ehemals wirklich gemacht wurde: ist $\frac{1}{\infty} = 0$; so ist $(1 + \frac{1}{\infty})^\infty = 1^\infty = 1$, da doch $(1 + \frac{1}{\infty})^\infty = 2,7128..$ d. i. die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems ist. Allein ich zeigte in meiner vorerwähnten Theorie des Unendlichen, die über die gegenwärtige Materie überhaupt viel Licht verbreitet, §. 42. aufs strengste, daſs die Potenz $(1 + \frac{1}{\infty})^\infty = 2,7182 \ldots$ gerade nur unter der Bedingung wahr seyn kann, wenn genau $\frac{1}{\infty} = 0$ ist, und daſs also der ganze Einwurf eine deutliche Bestätigung des letztern Satzes ist.

31.

So ist es denn von allen Seiten gewiſs, daſs die Differentiale dx, dy, dz etc. nichts weiter als fingirte *unendlichvielste Theile ihrer Gröſsen* x, y, z etc., und eben daher keine Gröſsen, sondern im strengsten Sinne *Nullen* sind, und daſs also die bequemen Ausdrücke dx, dy etc. eigentlich nichts anders bedeuten, als $\frac{x}{\infty}$, $\frac{ny}{\infty}$ etc., so daſs man allemahl jene statt dieser, und diese statt jener setzen kann. So kann man statt $d.x^2 = 2x\,dx$ (16.), $d.x^2 = 2x.\frac{x}{\infty}$ setzen, denn wenn x um $\frac{x}{\infty}$ wächst; so wächst x^2 um $2x.\frac{x}{\infty} + \frac{x^2}{\infty^2}$, folglich ist $d.x^2 = 2x.\frac{x}{\infty} + \frac{x^2}{\infty^2}$, mithin $d.x^2 : \frac{x}{\infty} = 2x + \frac{x}{\infty} = 2x$, also $d.x^2 = 2x.\frac{x}{\infty}$, wo sich aber sogleich zeigt, daſs der Ausdruck dx

eine weit bequemere Rechnung giebt als $\frac{x}{\infty}$. Eben so kann man umgekehrt $\frac{x}{\infty}$ in dx verwandeln, z. *B*. wenn a die Grundzahl und m der Modul eines logarithmischen Systems ist; so ist $a^{x+\frac{x}{\infty}} = y + \frac{y}{m} \cdot \frac{x}{\infty}$, mithin wenn $x = l, y$ um $\frac{x}{\infty}$ wächst, so wächst die Zahl y um $\frac{y}{m} \cdot \frac{x}{\infty}$. Setzt man also für x die Zunahme $\frac{x}{\infty} = dx$, und für y die Zunahme $\frac{y}{m} \cdot \frac{x}{\infty} = dy$; so ist $dy = \frac{ydx}{m}$, und $dx = \frac{mdy}{y}$, mithin $d.ly = \frac{mdy}{y}$, und $dy = y \,.\, d.ly$, wo sich also das Differential des Logarithmen unmittelbar ergiebt. Überhaupt ist bekannt, dafs ohne die Differentialrechnung, durch den directen Gebrauch der unendlichvielsten Theile sehr schwere Theorien sich nicht nur entwickeln lassen, sondern dafs dieses Verfahren, wie meine obige Theorie der Logarithmen zeigt, oft ungemein leichte und kurze Theorien liefert. Indessen würde dasselbe in unzähligen Fällen zu verwickelt und unbrauchbar werden, wo die Differentialrechnung sehr kurze Wege eröffnet.

32.

Euler war der erste, der in seinen *Institut. calcul. diff.* sowohl in der Vorrede, als *Cap.* III. öffentlich und mit Festigkeit behauptete, dafs die sogenannten unendlichkleinen Gröfsen, mithin auch die Differentialen absolute Nullen, und daher jedes Differentialverhältnifs $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ ist. Aber da er dieses für ungezweifelt hielt, so entstand nun eben die zweyte schwierige Frage (24.), wie können blofse Nullen im geometrischen Verhältnifs stehen? Um diese Frage zu beantworten, behauptete *Euler* a. a. O. *Cap.* III. §. 84. dafs zwar das arithmetische Verhältnifs zwischen zwey Nullen allemal ein Ver-

hältnifs der Gleichheit wäre, nicht aber das geometrische, sondern in diesem die eine Null nothwendig gröfser seyn müsse, als die andere, und beweiset dieses so: „*Facillime hoc perspicietur ex hac proportione geometrica* $2:1 = 0:0$. *in qua terminus quartus est* $= 0$ *uti tertius. Ex natura autem proportionis, cum terminus primus duplo fit major, quam secundus, necesse est, ut et tertius duplo maior sit quam quartus.*“ Hieraus schlofs er ferner, dafs, obgleich die unendlichkleinen Gröfsen an sich lauter absolute Nullen sind, es dennoch, wenn man sie im geometrischen Verhältnisse betrachtet, unendlich viele Ordnungen derselben geben könne, und er behielt daher in seinen Principien der Differentialrechnung die damals gewöhnliche Art des Vortrags bey. Allein hier ist einleuchtend, dafs, wenn der Satz $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ nur unter der Bedingung wäre, dafs eine absolute Null gröfser als die andere ist, die ganze Differentialrechnung auf einem Grunde ruhete, dessen Ungereimtheit unwiderlegbar wäre. Es war daher natürlich, dafs man jene Schwierigkeit auf eine andere Art zu heben suchte. *Kästner*, *Karsten* etc. suchten daher das Fundament der Differentialrechnung so zu legen, dafs man das Unendlichkleine entweder ganz entbehren, oder wenn man der Kürze wegen diesen Ausdruck gebrauchen wollte, der Sinn desselben einem jeden deutlich wäre, und führten deshalb alles auf den Newtonschen Begriff der Grenzen, oder der *ersten* und *letzten* Verhältnisse zurück, von welchen *Euler* a. a. O. selbst zeigt, dafs diese zu finden, der ganze Zweck der Differentialrechnung ist, und dafs dieses in der That der wahre Sinn und Zweck der Differentialverhältnisse sey, ist (23.) entwickelt worden.

Kästner erklärte es in der *vierten Anmerkung der Vorrede seiner Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* für unerlaubt, von dem beständigen Verhältnifs zweyer veränderlichen Gröfsen auf das Verhältnifs dessen zu schliefsen, *das noch bleibt*, wenn die Gröfsen *nicht mehr sind*, d. i. $\frac{dx}{dy}$ noch für ein Verhältnifs zu halten, wenn dx, dy absolute Nullen, mithin $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ sind, und sucht diesen Satz aufs

beste lächerlich zu machen. Er macht daher einen groſsen Unterschied zwischen einer *verschwindenden*, und schon *wirklich verschwundenen* Gröſse, und erklärt die erstere als das sogenannte Unendlichkleine, nicht durch eine Gröſse, die kleiner als jede angebliche Gröſse ist, sondern kleiner, als eine solche *werden kann*. Eine Gröſse, sagt er daher, nähert sich einem Werthe, den man ihre *Grenze* nennt, *unendlich*, wenn ihr Unterschied von diesem Werthe kleiner, als jede Gröſse *werden kann*, die sich angeben läſst. Wenn aber zum Beyspiel $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ (8.), sich dem Werthe $2x$ unendlich nähert; so kann für $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$ jeder Werth gesetzt werden, der zwischen $2x$ und $2x + \Delta x$ fällt. Man darf also Δx *unendlich abnehmen*, oder *verschwinden* lassen, d. i. annehmen, daſs sie kleiner *werden kann*, als jede Gröſse, die sich angeben läſst, und die Grenze, die man statt $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$ brauchen kann, ist $2x$. Allein durch alle diese subtilen Distinctionen zwischen *verschwinden* und *verschwunden seyn*, und zwischen sich der Grenze *unendlich nähern*, und sie *bereits erreicht haben*, wird offenbar für unsere Einsicht nicht das geringste gewonnen, sondern vielmehr die strenge Richtigkeit der Differentialrechnung in der That verdächtig gemacht. Denn man drücke sich aus, wie man wolle, so steht das ewig fest, daſs $2x + \Delta x = 2x$ im *strengen mathematischen* Sinne *nicht eher* wahr seyn kann, als wenn Δx im strengsten Sinne $= 0$, und als Gröſse betrachtet, völlig *verschwunden* ist, mithin auch nicht anders $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x} = 2x$ seyn kann, als wenn $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ ist.

Karsten war mit dieser Kästnerschen Vorstellungsart gar nicht zufrieden, sondern warf ihr beständig vor, daſs man die aus derselben hergeleiteten Sätze nur als *beynahe* wahr ansehen könnte. Er pflichtete daher der *Eulerschen* Behauptung völlig bey, daſs die Differentialen nichts weiter als Nullen sind, allein da unwidersprechlich alle Nullen gleich sind; so schloſs er in seinen *Anfangsgründen der ma-*

thematischen Analysis, 1786. *Abschnitt* II. §. 27., daſs alle Vergleichung zwischen ihnen wegfalle, und wenn daher $\Delta x = 0$, $\Delta . x^2 = 0$ sind, man gar nicht weiter fragen könne, was für ein *Verhältniſs* zwischen ihnen befindlich sey, sondern bloſs auf die *Grenze* $\frac{2x}{1}$, oder den letzten *Werth* des *Exponenten* des Verhältnisses $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$, der sich nichts desto weniger bestimmen lasse, zu sehen habe. Allein daſs auf diese Art die Schwierigkeit nicht gehoben, sondern vergröſsert wird, ist einleuchtend. Denn nach seiner eigenen Definition heiſst die *Grenze* $2x$ nichts anders, als der *Exponent* des Verhältnisses $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$, den man erst dann erhält, wenn sowohl die Zunahme Δx, als $\Delta . x^2 = 0$ gesetzt worden. Wenn also nach seiner Behauptung in diesem ihren Zustande keine Vergleichung, mithin auch kein *Verhältniſs zwischen ihnen* möglich ist, wie kann dann, nach aufgehobenem *Verhältniſs*, noch der Exponent als Grenze zurückbleiben? Würde hieraus nicht vielmehr strenge folgen, daſs *letzterer* eben so widersprechend sey, als das Verhältniſs $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ selbst, dessen Exponent er ist, und daſs also in der Gleichung $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ der Werth $2x$ sich dem Verhältnisse $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$ zwar immer mehr nähern, aber ihm niemals erreichen könne, weil in diesem Falle das Verhältniſs $\frac{\Delta . x^2}{\Delta x}$ ein sich widersprechender Begriff werden müſste. Und wie ist man, wenn $\frac{d . x^2}{dx}$ gar kein Verhältniſs ist, befugt, mit demselben als einem solchen zu rechnen?

Im *Berlinischen Magazin der Wissenschaften und Künste*, *zweyter Band*, *erstes St.* 1784. S. 1—7. und in den *Anfangsgründen der Differential- und Integral-Rechnung*, *zum Gebrauch des Ingenieurs*

und Artilleristen, von einem Königl. Preuſs. Officier, Halle 1784. *in der Vorrede*, sucht man der Schwierigkeit auf eine etwas veränderte Art auszuweichen. In beyden gesteht man, daſs die Differentialen bloſse Nullen sind, dagegen aber wird geleugnet, daſs $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ eine *Gröſse*, oder ein *Verhältniſs* sey, und dieser Ausdruck für ein bloſses *Zeichen* desjenigen Verhältnisses ausgegeben, welches man erhält, wenn die Incremente von x, $y = 0$ werden. „So oft, heiſst es „in der letzten Schrift, $d.U$, dx, dy u. s. w. vorkommen, so bedeu„ten diese Ausdrücke *Null*. Nun ist man aber *übereingekommen*, „solche Ausdrücke, wie $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ u. s. w., obgleich *sie auch* nichts „weiter als *Null* sind, als *Zeichen anzunehmen*, wodurch das *Daseyn* „gewisser *Gröſsen* angedeutet wird. Der Ausdruck $x\frac{dU}{dx}$ zeigt also „keinesweges $x.\frac{0}{0}$ an, sondern man will damit so viel sagen, daſs x „mit einer gewissen *Gröſse*, welche das *Zeichen* $\frac{dU}{dx}$ anzeigt, mul„tiplicirt worden sey. Hingegen ist der Ausdruck $dx\frac{dU}{dy}$ weiter „nichts, als *Null*." Dieser letzte Satz ist in allen Fällen, wo entweder $\frac{dU}{dy} = 0$, oder $\frac{dU}{dy} = a$, d. i. einer endlichen Gröſse gleich ist, allerdings richtig, weil sowohl $0.0 = 0$, als auch $0.a = 0$ ist, aber wenn $\frac{dU}{dy} = \infty$ ist; so ist, da $dx = \frac{x}{\infty}$ ist, $dx\frac{dU}{dy} = x$ (3.). Die übrigen Sätze hingegen sind offenbare Widersprüche. Denn behaupten, 1) daſs $dU = 0$, $dy = 0$, und gleichwohl nicht $\frac{dU}{dy} = \frac{0}{0}$, 2) daſs jederzeit $\frac{dU}{dy} = 0$, und gleichwohl $\frac{dU}{dy} = a$, d. i. eine *Gröſse* ist, mit welcher multiplicirt werden soll, 3) daſs die Richtigkeit der Differentialrechnung auf der *Uebereinkunſt* der Analysten beruhe,

Ausdrücke, die nichts weiter als *Null* sind, als *Zeichen* wirklicher *Gröſsen* anzunehmen, das heiſst doch wohl ohne Zweifel so viel, als lauter Widersprüche behaupten.

33.

Da es also eben so unumstöſsliche Wahrheit bleibt, daſs jedes Verhältniſs zweyer Differentialen ein wirkliches Verhältniſs zweyer Nullen ist, als daſs alle Nullen einander gleich sind; so läſst sich schon voraus vermuthen, daſs der Widerspruch zwischen diesen beyden Sätzen bloſs *scheinbar sey*, und daſs man also bey dieser ungewöhnlichen Sache bloſs den wahren Gesichtspunkt übersehen habe, aus welchem sie beurtheilt werden muſs. Und in der That läſst sich diese Vermuthung auf eine sehr leichte und evidente Art als die strengste Wahrheit demonstriren. Um bey dem vorigen *Eulerschen* Beyspiele stehen zu bleiben, frage ich: woher läſst es sich beweisen, daſs in der Proportion $2:1=0:0$ die erste Null zweymal gröſser seyn müsse, als die zweyte? Daher, sagt Euler, weil, da das erste Glied 2 mal gröſser ist, als das zweyte, *auch das dritte 2 mal gröſser seyn müsse, als das vierte.* Allein dieser, für alle Proportionen, deren Glieder insgesammt wirkliche Gröſsen sind, unleugbar allgemein gültige Satz, wird *hier* sehr unrichtig angewandt. Dieses einzusehen, darf man nur auf den *Beweis* sehen, auf welchem seine Wahrheit beruht. Man setze nämlich, in der Proportion $a:b=c:d$ sey der Exponent des Verhältnisses $a:b=n$; so ist $a=nb$, und $c=nd$. Nun sey $a>b$; so ist $n>1$, folglich auch $nd>d$, also $c>d$. Allein es ist offenbar, daſs der Satz: *wenn* $n>1$; *so ist* $nd>d$ zwar allgemein wahr ist, wenn d eine wirkliche *Gröſse* bedeutet, aber *keinesweges*, wenn man $d=0$ setzt, denn da immer $0\times n=0\times 1$ ist, was für eine Zahl n auch seyn mag; so ist in *diesem* Falle $nd=d$, also auch $c=nd$.

Hier ist also der besondere, aber in Rücksicht seiner Anwendung sich sehr weit erstreckende Fall, in welchem, ohne irgend einen Widerspruch, das Verhältniſs zweyer ungleichen Glieder dem Verhältniſs zweyer gleichen gleich seyn kann, nämlich wenn die letztern beyde *Nullen* sind, und so hat man sich ohne Grund gefürchtet, daſs man mit *Euler* eine *Ungleichheit der Nullen* annehmen müſste, wenn man die Differentialen dx, dy für wirkliche Nullen, und daher den

Ausdruck $\frac{0}{0}$, außer dem Falle, wenn man $\frac{0}{0} = 1$ setzt, für ein wahres geometrisches Verhältniß halten wolle. Vielmehr folgt eben aus dem Satze, daß in jeder geometrischen Proportion das Product der beyden äußersten Glieder dem Producte der beyden mittlern gleich seyn muß, daß wenn die Proportion $2 : 1 = 0 : 0$ richtig seyn soll, nothwendig $2 . 0 = 1 . 0$, mithin *alle Nullen*, so vielmal man auch die eine *mehr* nehmen mag, als die andere, *durchaus einander gleich seyn müssen.*

34.

Obgleich also die ganze Schwierigkeit, wie $\frac{0}{0} = a$ seyn könne, sich so leicht heben läßt, daß es fast befremdend ist, wie sie den Analysten so viele Mühe habe machen können; so wird es doch nicht undienlich seyn, die Natur dieses wichtigen Ausdrucks noch näher ins Licht zu setzen. Man kann denselben auf eine doppelte Art betrachten, entweder als ein *geometrisches Verhältniß*, oder als einen *Quotienten* oder *Bruch*. Betrachtet man ihn *erstlich* als ein geometrisches Verhältniß $0 : 0$; so folgt hieraus, daß 1) $0 : 0 = a : b$ 2) $0 : 0 = \infty : 1$, 3) $0 : 0 = 0 : a$. Denn da $b \times 0 = a \times 0$, $1 \times 0 = \infty \times 0$, und $a \times 0 = 0 \times 0$ ist; so sind alle drey Proportionen richtig. Also ist $\frac{0}{0}$ entweder $= \frac{a}{b}$, oder $= \infty$ oder $= 0$. Nimmt man *zweytens* den Ausdruck $\frac{0}{0}$ als einen Quotienten oder Bruch; so ist von neuem klar, daß entweder $\frac{0}{0} = \frac{a}{b}$, oder $\frac{0}{0} = \infty$, oder $\frac{0}{0} = 0$ seyn kann, weil sowohl der Quotient $\frac{a}{b}$, als ∞, als 0 durch den Divisor 0 multiplicirt, den Dividend 0 giebt.

35.

Hieraus ist nun völlig klar: 1) daß das Verhältniß $0 : 0$ ein ganz *unbestimmtes*, und zwar unter allen möglichen Verhältnissen das *allgemeinste* ist, welches nicht nur alle mögliche *endliche* und *unendliche Größen*, sondern selbst die *Null* unter sich begreift, und daß man also mit Recht sagen kann: das *Hauptgeschäft* der ganzen Mathema-

tik bestehe blofs in der Entwickelung des Verhältnisses $0:0$, 2) dafs wenn daher die Analysis bey Aufsuchung einer unbekannten Gröfse x auf das Resultat führt $x=\frac{0}{0}$, dieses jederzeit ein Beweis ist, dafs der Werth von x *unbestimmt* sey, 3) dafs der Grund, warum das Verhältnifs $0:0$ von so unendlichem Umfange ist, darin liegt, weil $0=0\times 0=1\times 0=a\times 0=\infty\times 0$ ist. Wenn daher $\frac{0}{0}=\frac{a}{b}$, oder $\frac{0}{0}=\infty$, oder $\frac{0}{0}=0$ ist; so haben diese Sätze eigentlich den Sinn $\frac{a\times 0}{b\times 0}=\frac{a}{b}$, $\frac{\infty\times 0}{1\times 0}=\frac{\infty}{1}$, oder $\frac{0\times 0}{\phi\times 0}=\frac{0}{1}$, eben so, wie man sagt: $\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$, $\frac{\infty . x}{1 . x}=\frac{\infty}{1}$, $\frac{0 . x}{1 . x}=\frac{0}{1}$. Also ist klar, dafs, wenn man nur die Regeln der Arithmetik *genau* und *strenge* befolgt, die Rechnung mit Nullen eben so gründlich und apodictisch gewifs ist, als die Rechnung mit wirklichen Gröfsen und Zahlen. Dieses zeigen auch alle Gleichungen, die sich in $\frac{0}{0}$ verwandeln, wenn man nur den arithmetischen Operationen treu bleibt, und die durch die Rechnung erhaltenen Coefficienten der Nullen genau beybehält. So verwandelt sich z. B. die Gleichung $\frac{144-x^2}{12-x}=12+x$, wenn man $x=12$ setzt, in diese: $\frac{0}{0}=24$, allein nach den Regeln der Arithmetik ausgedrückt, ist dieselbe eigentlich diese: $\frac{24 . 0}{1 . 0}=\frac{24}{1}$.

Denn $\frac{144-x^2}{12-x}=\frac{(12+x)\ (12-x)}{1 . (12-x)}$. Setzt man also $x=12$; so ist $\frac{144-x^2}{12-x}=\frac{24 . 0}{1 . 0}=\frac{24}{1}$.

Da nun jedes Differentialverhältnifs $\frac{0}{0}$ ist; so ist, wenn $\frac{dz}{dx}=a$ ist, a mag irgend eine Gröfse, oder auch 0 bedeuten, der eigentliche Sinn dieser Differentialgleichung allemal dieser: $\frac{dz}{dx}=\frac{a . 0}{1 . 0}$. Denn es ist $dz=a\,dx$. Setzt man daher $dx=1 . 0=\frac{1 . x}{\infty}$; so ist

$dz = a.0 = \frac{ax}{\infty}$, also $\frac{dz}{dx} = \frac{a.0}{1.0} = \frac{a.x}{\infty} : \frac{1.x}{\infty} = a : 1$. Und nun zeigt sich vollkommen, wie bequem die Ausdrücke dz, dx sind, denn durch diese weiſs man, welcher Gröſse das Differential 1.0, und welcher das Differential $a.0$ zugehört, und man kann mit den Differentialen eben so, wie mit wirklichen Gröſsen rechnen, ohne daran zu denken, daſs sie bloſse Nullen sind, auſser da, wo sie zu endlichen Gröſsen addirt, oder von ihnen subtrahirt werden sollen.

36.

Da das Differentialverhältniſs $\frac{dz}{dx}$ nicht nur Null, oder unendlich groſs, oder eine beständige Gröſse, sondern auch jede *veränderliche Gröſse* seyn kann (34.); so ist klar, daſs die Differentialen dz, dx, ungeachtet sie an sich bloſse Nullen sind, sich dennoch von neuem differentiiren lassen, und, wenn dieses neue Differentialverhältniſs gleichfalls eine veränderliche Gröſse ist, diese Differentialen von dz, dx wieder neue Differentialen geben können, und daſs man also von einem Differential zu immer höheren fortgehen kann, nämlich von dz, dx, als dem ersten Differential von z, x, zum zweyten $d.dz$, $d.dx$, von diesem zum dritten $d.ddz$, $d.ddx$, von diesem zum vierten $d.dddz$, $d.dddx$ u. s. w. Um aber die öftere Wiederhohlung des Buchstabens d zu vermeiden, und zugleich einen allgemeinen Ausdruck für jedes höhere Differential zu erhalten, drückt man $d.dz$ durch d^2z, $d.ddz$ durch d^3z, $d.d^3z$ durch d^4z etc., und überhaupt das n^{te} Differential von z durch d^nz aus, und eben so bezeichnet man das zweyte Differential von x durch d^2x, das dritte durch d^3x etc., und überhaupt das n^{te} durch d^nx. Man setze also überhaupt das Differentialverhältniſs $\frac{dz}{dx} = v$, d. i. irgend einer Function v von x gleich; so ist $dv = d.\frac{dz}{dx} = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx^2}$ (18.). Nun setze man z. B. $z = x^n$; so ist $dz = nx^{n-1}dx$ (20.), und $\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$,

$$\text{folglich } d.\frac{dz}{dx} = d.nx^{n-1} = n.n-1.x^{n-2}dx \text{ (20)},$$

$$\text{mithin } \frac{dx d^2z - dz d^2x}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2}dx,$$

$$\text{folglich } dx d^2z - dz d^2x = n.n-1.x^{n-2}dx^3,$$

$$\text{also } d^2z = n.n-1.x^{n-2}dx^2 + \frac{dz\, d^2x}{dx}$$

$$= n.n-1.x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x,$$

$$\text{und } \frac{d^2z}{d^2x} = nx^{n-1} + n.n-1.x^{n-2}\frac{dx^2}{d^2x}.$$

Da nun der Exponent des Verhältnisses $\frac{d^2z}{d^2x}$ wieder eine veränderliche Gröſse ist; so ist klar, daſs dasselbe sich von neuem differentiiren läſst, und so immer höhere Differentiale d^3z, d^4z etc. möglich sind. Da aber der Quotient $\frac{dx^2}{d^2x}$ unbestimmt ist; so erhellt zugleich, daſs wenn man das erste Differential dx als *veränderlich* annimmt, das Verhältniſs der zweyten Differentiale $\frac{d^2z}{d^2x}$ gleichfalls *unbestimmt* bleibt, und daſs dieses also auch von den Verhältnissen aller höhern Differentiale gelten muſs. Sollen daher die Verhältnisse der höhern Differentiale *bestimmt* werden; so muſs man, wenn z die Function einer einzigen veränderlichen Gröſse x ist, ihr erstes Differential dx, und wenn z eine Function von zwey veränderlichen Gröſsen x, y wäre, entweder dx, oder dy als *beständig* annehmen. Geschieht dieses, so fallen die höhern Differentialen d^2x, d^3x etc., oder d^2y, d^3y etc. alle weg. So fällt in der vorigen Gleichung $d^2z = n.n-1x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x$, wenn man dx als *beständig* ansieht, d^2x, mithin auch $nx^{n-1}d^2x$ gänzlich weg, und es ist also, wenn $z = x^n$ ist, in diesem Falle $d^2z = n.n-1.x^{n-2}dx^2$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2}$, folglich

$$d.\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^3z}{dx^2} = d.n.n-1.x^{n-2} = n.n-1.n-2.x^{n-3}dx, \text{ also}$$

$\frac{d^3z}{dx^3} = n.n-1.n-2.x^{n-3}$, und $d^3z = n.n-1.n-2.x^{n-3}\,dx^3$. Eben hieraus folgt, dafs $\frac{d^4z}{dx^4} = n.n-1.n-2.n-3.x^{n-4}$, folglich

$$d^4z = n.n-1.n-2.n-3.x^{n-4}\,dx^4 \text{ etc., und überhaupt}$$

$$\frac{d^rz}{dx^r} = n.n-1.n-2 \;\ldots,\; n-(r-1).x^{n-r}, \text{ folglich}$$

$$d^rz = n.n-1.n-2 \;\ldots\; n-(r-1).x^{n-r}\,dx^r \text{ ist.}$$

Hieraus erhellt also, dafs die höhern Differentiale eben so wenig, als die ersten, mit *unendlichkleinen Gröfsen* und unzählichen Graden derselben, und noch weniger, wie *Euler* meinte, mit *Nullen*, von denen einige *unendlichkleiner* als die andern wären, das mindeste zu haben. Um daher allen Verdacht zu vermeiden, als ob die Differentialrechnung unendlichkleine Gröfsen, ja selbst verschiedene Ordnungen derselben voraussetze, sollte man sie lieber nicht mehr die *Analysis des Unendlichen*, sondern wie schon *Karsten* rieth, die *höhere Analysis* nennen.

37.

Aus allem diesen ist es also unwidersprechlich gewifs, dafs die Differentialrechnung nichts anders, als eine *künstliche Nullenrechnung*, und daher das sinnreichste und höchste Kunstwerk des menschlichen Geistes ist. Sie für etwas anders, als wirkliche Nullenrechnung halten wollen, hiefse: sie erniedrigen, und ihr ganzes Fundament als ungereimt und widersprechend untergraben. Aber als Nullenrechnung steht ihr Fundament so fest und unerschütterlich, als das Fundament der gemeinen Arithmetik selbst, und ich bin fest überzeugt, dafs selbst *Lagrange's* Theorie der analytischen Functionen, dieses unschätzbare, lehrreiche und gründliche Meisterwerk, nebst dem darauf errichteten neuen Differentialcalcul des Bürgers *Lacroix* die Leibnizische Differentialrechnung nicht fester begründen könne, als sie es schon, als künstliche Nullenrechnung betrachtet, an sich selbst ist.

§3.

So strenge aber die Differentialrechnung, als künstliche Nullenrechnung betrachtet, indem sie mit ihren Differentialen nach eben den Regeln, als mit wirklichen Gröſsen rechnet, schon an sich ist; so strenge ist sie auch in ihrer *Anwendung* auf die *Geometrie* und *Mechanik*; und hiedurch auf die *ganze angewandte Mathematik*. Denn da sie ihre Differentialen als unendlichvielste Theile endlicher Gröſsen, und eben daher als absolute Nullen betrachtet, und sowohl die Geometrie, sobald sie krumme Linien mit geraden vergleichen will, als auch die Mechanik, sobald sie sich mit der ungleichförmigen Bewegung beschäftigen will, sich gleichfalls unendlichvielste Theile der Linie und Zeit fingiren muſs; so behält jene bey ihrer Anwendung auf diese immer denselben allgemeinen Gesichtspunkt, und denselben allgemeinen Gang. Lagrange meynt zwar (a. a. O. 4.), daſs die Richtigkeit dieser Anwendung bloſs darauf beruhe, weil der Irrthum, der daraus entstehe, daſs man bey der Anwendung in der That unendlichkleine Gröſsen voraussetze, durch einen andern Irrthum verbessert und ausgeglichen werde, nämlich durch den, der daraus entsteht, daſs man bey der Differentiirung nur die unendlichkleinen Gröſsen derselben Ordnung zurück behält. „Wenn man, sagt er z. B. eine krumme Linie als ein „Polygon von unendlichvielen und zugleich von undendlichkleinen „Seiten betrachtet, und die Verlängerung einer solchen Seite die Tangente der krummen Linie ist; so ist klar, daſs man etwas Irriges „voraussetzt, aber der Irrthum wird in dem Calcul durch die Aus- „lassung der unendlichkleinen Gröſsen wieder verbessert." Allein, was *erstlich* die *Auslassung* beym Calcul selbst betrifft, so ist diese allerdings unerlaubt, wenn man die Differentialen für wirkliche *Gröſsen* ausgiebt, da sie dieses aber, wie bewiesen worden, nicht sind, sondern bloſse Nullen sind; so ist ihre Auslassung da, wo sie zu wirklichen Gröſsen addirt, oder subtrahirt werden sollen, kein Irrthum, sondern *vollkommen* rechtmäſsig, und zu dem Zwecke der Differentialrechnung eben das *wesentliche* Erfordernis. Eben so ist es bey der *Anwendung* der Differentialrechnung gleichfalls ein offenbarer Widerspruch, wenn man die bloſs fingirten unendlichvielsten Theile einer Linie für wirkliche Linien. und z. B. die Seite eines bloſs fingirten Unendlichecks für eine *wirkliche Seite* hält, aber daſs sie bey

dieser Fiction nicht mehr als Linien, sondern als blofse Punkte gedacht werden, und daher im Calcul, wenn sie zu Linien addirt oder subtrahirt werden sollen, mit Recht ausgelassen werden, ist oben gleichfalls strenge bewiesen. Und so ist klar, dafs der sinnreiche Vorwurf des grofsen Geometers, dafs in der Anwendung der Differentialrechnung der Irrthum der letztern den Irrthum der erstern verbessere und ausgleiche, allerdings gegründet seyn würde, wofern beyde es wirklich mit unendlichkleinen *Gröfsen* zu thun hätten, keinesweges aber, wenn man erwägt, dafs dieselben als blofs fingirte unendlichvielsten Theile der Gröfsen keine Gröfsen, sondern blofse Nullen sind. Aufserdem ist bekannt, dafs man die wichtigsten Sätze der Geometrie und Mechanik, ohne die Differentialrechnung durch den blofsen Gebrauch der fingirten unendlichvielsten Theile, wenn man sie als Nullen oder Punkte behandelte, aufs richtigste hergeleitet, wie z. B. *Vega's* Vorlesungen, und selbst meine obige Theorie der Logarithmen zeigen. Wäre also dieser Gebrauch ein Irrthum, wo läge denn hier der zweyte Irrthum, der jenen hätte verbessern und ausgleichen können.

39.

Nicht genug aber, dafs die Differentialrechnung sich sowohl an sich selbst, als in ihrer Anwendung, durch die gröfseste Strenge auszeichnet, sondern was noch auffallender, aber unwidersprechlich gewifs ist, ist dieses, *dafs ihr wahres und festes Fundament zugleich dasjenige ist, auf welchem die ganze Gründlichkeit und Strenge der höhern Geometrie und Mechanik ruht.* Das Fundament von jener ist der Satz, dafs jedes Differential einer endlichen Gröfse nichts anders, als einen *unendlichvielsten Theil* derselben bedeutet, der aber als ein unendlichvielster gedacht, kein wirklicher, sondern blofs *fingirter Theil* der Gröfse, mithin keine Gröfse, sondern blofs *Mangel* der Gröfse, d. i. in Rücksicht ihrer eine blofse Null ist. Aber eben dieser Satz ist auch das Fundament der ganzen höhern Geometrie und Mechanik. Denn da *krumme* und *gerade* Linien ganz ungleichartig sind; so ist es schlechterdings unmöglich, sie mit einander zu vergleichen, oder gar die krumme durch die gerade zu messen, wofern man die krumme nicht erst mit der geraden *gleichartig* macht. Allein das

krumme gerade zu machen, ist nicht anders möglich, als auf dem Wege der *Erdichtung*, indem man sich die krumme Linie als eine *aus lauter geraden zusammengesetzte*, oder *gebrochene*, fingirt. So lange aber jeder Theil dieser gebrochenen Linie ein *endlichvielster* ist; so wäre es widersprechend, die krumme Linie mit der gebrochenen für einerley, mithin auch jeden Bogen mit seiner Sehne für einerley zu halten. Soll daher letzteres erlaubt seyn; so muſs man sich jeden Bogen als den *unendlichvielsten* Theil der gegebenen krummen Linie fingiren, und *diese* Fiction ist völlig erlaubt, denn nun wird jeder von diesen fingirten Bogen ein *Punkt*, mithin seine *Sehne* gleichfalls ein Punkt, folglich jeder Bogen mit seiner Sehne *vollkommen einerley*, also auch die ganze krumme Linie mit der gebrochenen vollkommen einerley. Hieraus ist also schon *a priori* klar, daſs alle Methoden, die Gröſse der krummen Linien durch die Gröſsen der geraden ohne Hülfe gedachter Fiction zu bestimmen, nichts weiter als eine *scheinbare* Schärfe haben können; so strenge sie auch aussehen mögen, indem sie schon dem ersten Begriffe nach widersprechend sind.

40.

Dieser unvermeidlichen Fiction glaubte *Archimedes* und seine Nachfolger durch die sinnreiche Exhaustionsmethode, oder die *Methode der Grenzen* völlig entgehen zu können, nach welcher sie bewiesen, daſs sich von zwey ähnlichen Vielecken allemal eins im Kreise, und das andere um den Kreis beschreiben lieſse, so daſs der Unterschied zwischen ihnen, und also um so mehr der Unterschied zwischen jedem von ihnen, und dem Kreise als ihrer gemeinschaftlichen Grenze, *kleiner* wäre, als irgend eine gegebene Gröſse, und daſs eben dieses auch bey jeder andern krummen Linie statt fände. Um aber diesen Beweis führen zu können, muſste Archimedes wenigstens folgende zwey Sätze als *Axiome* annehmen:

1) Die gerade Linie ist der *kürzeste* Weg zwischen zwey gegebenen Punkten.

2) Jede krumme Linie, die nach einer Seite durchweg concav ist, ist kleiner, als die Summe der beyden in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten, zwischen welchen sie enthalten ist.

Allein dafs keiner von diesen beyden Sätzen für ein *ächtes Axiom* gelten könne, sondern durchaus einen strengen Beweis fordere, läfst sich leicht zeigen. Denn der erste Satz enthält folgende drey Specialsätze: 1) die gerade Linie von *A* nach *B* ist kleiner, als jede *gebrochene;* 2) sie ist kleiner, als jede *krumme*, und 3) sie ist kleiner als jede *vermischte*. Sollte er also allgemein genommen ein ächtes geometrisches Axiom seyn; so müfste von keinem dieser drey Specialsätze ein weiterer Beweis möglich seyn. Nun aber läfst der erste von ihnen sich strenge demonstriren, und ist daher selbst beym *Euklid* ein wirkliches Theorem. Wie kann es also mit der *Logik* bestehen, einen Satz allgemein, d. i. in *Ansehung aller möglichen Specialfälle*, die er unter sich begreift, für ein *Axiom* auszugeben, wenn gleichwohl einer von diesen Specialsätzen ein wirkliches *Theorem* ist. Will daher der Mathematiker, der diesen Satz als Axiom aufführen will, sich nicht selbst widersprechen; so mufs er ihn in seine drey Specialsätze absondern, den ersten als ein Theorem demonstriren, und hierauf blofs die beyden letzten als ein indemonstrables Axiom aufstellen. Allein auch bey diesem Verfahren geräth er wieder mit sich selbst in Widerspruch. Denn wenn er nun auf diese Art den ersten Specialsatz strenge bewiesen hat, mit welcher Befugnifs kann er nun fordern, dafs ich die beyden andern ohne Beweis annehmen, und ihm auf sein blofses Wort glauben soll, dafs von diesen kein Beweis mehr möglich sey, da doch diese offenbar schon *Corollaria des ersten* sind. Denn daraus, dafs die gebrochene Linie von *A* nach *B* um so mehr gröfser wird, als die gerade, aus je mehreren Theilen sie besteht, folgt, dafs sie die gerade desto mehr übersteigt, durch je mehrere Punkte der krummen Linie sie geht, also um so mehr, wenn man sich vorstellt, dafs sie durch alle Punkte der krummen Linie gienge, d. i. mit dieser völlig einerley wäre. Aber diese Vorstellung ist eben die unvermeidliche Fiction, von welcher hier die Rede ist. Will man sich also nicht selbst widersprechen, und die geometrische Gründlichkeit offenbar verletzen; so ist es schlechterdings nothwendig, diesen Satz aus der Klasse der Axiome in die Klasse der Theoreme zu setzen, und ihn strenge zu beweisen, aber eben daher ist der Geometer unumgänglich genöthigt, jede krumme Linie als eine gebrochene von unendlichvielen Theilen zu imaginiren. Eben dieses ist noch mehr

der Fall beym obigen *zweyten* Satz. Dieser begreift gleichfalls noch zwey leichtere unter sich, nämlich 1) den Satz: wenn zwey Dreyecke einerley Grundlinie haben, und die Spitze des einen innerhalb dem andern liegt; so ist die Summe der beyden andern Seiten des erstern kleiner, als die Summe der beyden andern Seiten des letztern, und 2) *diesen*: jede gebrochene Linie, die von den beyden Endpunkten der Grundlinie eines Dreyecks ganz innerhalb des letztern so gezogen wird, dafs ihre Theile keinen auswärts liegenden Winkel machen, ist kleiner, als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks. Nun aber ist der erstere von diesen Sätzen vom *Euklid* im *ersten Buch seiner Elemente, Satz* 21. als ein Theorem strenge erwiesen, und der zweyte läfst sich aus demselben, wie ich in meinen *Anfangsgründen der reinen Mathesis Geom.* §. 105. gezeigt habe, gleichfalls strenge demonstriren. Nach welcher Logik kann man sich also wohl berechtigt halten, den oberwähnten zweyten *Archimedischen* Satz, der doch ein unmittelbares Corollarium des letztern Satzes ist, sobald man sich die krumme Linie als eine aus unendlichvielen geraden zusammengesetzte imaginirt, für ein *Axiom* auszugeben, das schon zu einfach wäre, als dafs man Beweis davon fordern könnte? Ja hier ist aufserdem noch der besondere Fall, dafs *dieser* Satz nicht einmal *unmittelbar klar* ist, welches doch ein jedes Axiom schlechterdings seyn mufs, sondern vielmehr für alle mögliche Fälle so schwer zu übersehen ist, dafs ich seine allgemeine Richtigkeit durchaus bezweifeln würde, wenn ich von derselben nicht durch strenge Demonstration überzeugt wäre. Denn obgleich der Weg durch die beyden Tangenten in Ansehung der *Spitze*, in welcher beyde zusammenstofsen, von der geraden Linie, die zwischen ihren Berührungspunkten mit der krummen Linie liegt, sich weiter entfernt, als der Weg durch die krummen Linien zwischen ihnen; so läfst sich doch gar nicht *unmittelbar* einsehen, ob nicht die *continuirliche Abänderung des Weges* in der letztern machen kann, dafs die Länge desselben im Ganzen doch gröfser werden könnte, als die Länge des Weges durch die beyden Tangenten. Aufserdem drückt *Archimedes* selbst diesen Satz noch allgemeiner, aber dadurch so verwickelt aus, dafs, wie *Barrow* erinnert, ältere Ausgeber des Archimedes ihn nicht einmal verstanden haben. *Kästner* sagt daher in seinen *Anfangsgründen der Arithme-*

tik, *Geometrie etc. vierte Auflage*, S. 307, indem er denselben anführt, sehr bedeutend: der Satz ist für einen *Grundsatz ziemlich* weitläuftig, und merkt zugleich an, dafs Eutokius von Askalon in der That Beweise davon zu geben gesucht, die *Sturm* in seiner Übersetzung des Archimedes angeführt hat. Ja dieser Grundsatz des Archimedes hat, wie selbst *Lacroix* in der Vorrede zu seinem Lehrbegriff des *Differential*- und *Integralcalculs* bemerkt, schon bey seinen Zeitgenossen viel Widerspruch gefunden, indem er in dem Schreiben, worinn er sein Werk über die Quadratur der Parabel seinem Freunde Dositheus widmet, um den Zweifeln gegen seine Beweise zum voraus zu begegnen, sich auf das Beyspiel seiner Vorgänger beruft: „*visi sunt eodem lemmate etiam Geometrae, qui ante nos floruerunt.*" So sehr man also auch immer die strenge Gründlichkeit der Archimedischen Exhaustionsmethode rühmen mag; so ist doch unleugbar, dafs er von allen geometrischen Demonstrationen, die auf diese unächte Grundsätze, und vorzüglich auf den letzten, dessen Richtigkeit ohne einen wirklichen Beweis in der That blofs precair zugestanden werden kann, gegründet sind, ihre ganze vermeinte Strenge blofs *scheinbar* ist. Denn was hilft die schönste, sinnreichste und festeste Verknüpfung aller Theile eines Gebäudes, wenn man nicht Gewähr dafür leisten, und gründlich zeigen kann, dafs sein Fundament fest und sicher ist? Und da auch *Lagrange* seine Anwendung der Theorie der Functionen auf diese unächte Archimedische Axiome gebaut hat, wie er im *zweyten Theil derselben* No. 136. sogleich zu Anfange zum voraus selbst anmerkt; so ist klar, dafs auch dieses Meisterwerk, das sonst in der That ein Muster der Gründlichkeit ist, dennoch, anstatt die Leibnizische Differentialrechnung, seinem Zwecke nach, zu begründen, vielmehr durch diese erst begründet werden mufs, wofern sie auf einem festen Fundament ruhen soll. Bey der *Quadratur* der Curven kann zwar die Exhaustionsmethode die Archimedischen Axiome gänzlich entbehren, denn dafs z. B. die *Fläche* des im Kreise beschriebenen Vielecks kleiner sey, als die *Fläche* des um ihn beschriebenen, ist von selbst klar. Allein hier zeigt sich das Besondere, dafs, indem der Geometer durch die Exhaustionsmethode der Nothwendigkeit, sich den Kreis als ein regulaires Unendlicheck zu imaginiren, entgehen zu können glaubt, sie ihm am Ende zu die-

ser imaginairen Vorstellung vielmehr selber nöthigt, indem er durch sie zur Bestimmung der Kreisfläche nicht eher gelangt, als wenn er sich vorstellt, dafs beyde Vielecke mit dem Kreise, als ihrer zwischen ihnen befindlichen Grenze zusammenfallen, und so sich in den Kreis, und dieser sich in ein regulaires Unendlicheck verwandelt (26.).

Dafs ferner auch die *höhere Mechanik*, so bald sie die *ungleichförmige*, entweder *beständig beschleunigte*, oder *beständig verzögerte* Bewegung bestimmen will, durchaus zur Fiction *unendlichvielster Zeit*- und *Raum-Theile* ihre Zuflucht zu nehmen genöthigt ist, und daher ihr Fundament gleichfalls auf dem Fundamente der Leibnizischen Differentialrechnung ruhe, ist bereits (27.) hinlänglich erwiesen worden. Und so ist klar, dafs nicht nur die *Newtonsche* Fluxionenrechnung, sondern auch die *Lagrangische* Anwendung der Functionenlehre auf die Mechanik erst durch die Leibnizische Differentialrechnung ihre wahre Begründung erhält.

41.

Indem aber das Fundament der Differentialrechnung der Exhaustionsmethode erst gehörig begründet; so macht es dieselbe zugleich *entbehrlich*. Denn da es nunmehr strenge erwiesen worden, dafs die Rechnung mit den fingirten unendlichvielsten Theilen der Gröfsen, als wirklicher Nullen eben so fest steht, als die Rechnung mit wirklichen Gröfsen, hiedurch aber die ganze Übersicht der Sätze ohne weitere Umschweife *unmittelbar* und *geradezu* möglich wird; so werden durch den Gebrauch der Exhaustionsmethode die Demonstrationen nicht im mindesten gründlicher, vielmehr ruht ihre Gründlichkeit selbst am Ende doch erst auf den Principien der eben erwähnten Rechnung. Da es z. B. fest steht, dafs jede krumme Linie nicht nur mit dem vollkommensten Recht als ein Unendlicheck angesehen werden kann, sondern wenn man sie mit der geraden vergleichen will, bey Verlust aller *wahren* Gründlichkeit, als ein Unendlicheck betrachtet werden mufs; so ist es *unmittelbar* klar, dafs die Kreise sich wie ähnliche in ihnen beschriebene Vielecke, mithin auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, dafs jeder Kreis einem Dreyeck gleich ist, das die Peripherie zur Grundlinie, und den Halbmesser zur Höhe hat, dafs die Cylinder als unendlicheckigte Prismen, die Kegel als

unendlicheckigte Pyramiden u. s. w. anzusehen, und alle hieraus demonstrirte Sätze erhalten dadurch eine unmittelbare *Evidenz*, die durch den mühsamen und weitläuftigen Gang der Exhaustionsmethode nicht wenig geschwächt wird. Indessen ist hiebey meine Meinung gar nicht, dafs man deshalb die Exhaustionsmethode ganz bey Seite legen soll, sondern nur, dafs man den *Anfänger* theils in der Elementargeometrie, theils in der Differentialrechnung und ihrer Anwendung auf die Geometrie und Mechanik damit verschone, damit er theils nicht gleich anfangs durch unnöthige Erschwerung der Mathematik von ihrem Studio abgeschreckt werde, theils schon hinreichend geübt, und mit gereiften Einsichten zu den auf die Exhaustionsmethode gegründeten schwerern Werken zur nöthigen Vermehrung der übrigen Ansichten der Sache, desto leichter und mit desto gröfserem Nutzen überzugehen im Stande ist.

42.

Übrigens mufs jedem philosophischen Mathematiker das Besondere in der ursprünglichen Einrichtung unserer Sinnlichkeit merkwürdig seyn, dafs sie ihn, wenn er nicht blofs scheinbar gründlich seyn will, sogleich im Anfange seiner Wissenschaft zwingt, sich über das Endliche zu erheben, und sich auf der einen Seite sofort zur reellen Idee des Unendlichgrofsen, auf der andern aber zur fingirten Idee des Unendlichkleinen empor zu schwingen. In der Arithmetik führt ihn schon die *allgemeine* Division, und die Ausziehung der Wurzeln unvermeidlich zur Idee unendlicher Reihen, die entweder ohne Ende zunehmen, oder bis auf *Null* abnehmen. In der Geometrie aber zwingt ihn schon sogleich im Anfange, sobald er eine nicht blofs precaire, sondern gründliche Theorie von der Lage, welche gerade Linien in derselben Ebene gegen einander haben können, errichten will, der offenbar *unächte* eilfte Grundsatz des Euklids, dafs er sich, so sehr er sich auch dawider sträuben mag, über die endlichen Linien und Flächen zur Betrachtung unendlicher Linien, und der zwischen ihnen enthaltenen unendlichen Flächen erheben mufs, wie ich im zweyten *Theil meiner Prüfung der Kantischen Kritik der reinen Vernunft*, §. 45., und noch umständlicher in meinem kurzen Lehrbegriff der Arithmetik, Geometrie etc. S. 191. 192. bewiesen habe. Sobald

er ferner zur Vergleichung krummer Linien mit geraden fortgehen will; so ist seine Einbildungskraft unvermeidlich gezwungen, ihre Zuflucht zur Erdichtung zu nehmen, und sich unendlichvielste Theile der Gröſsen zu imaginiren, und da diese bloſse Nullen sind, zum erhabensten und allgemeinsten Calcul, der alle mögliche Gröſsen unter sich begreift, nämlich zur Differential- oder Nullenrechnung aufzuschwingen, die umgekehrt unter dem Namen der Integralrechnung ihn die in Nullen verwandelten Gröſsen wieder auffinden lehrt. So soll der Geist des Mathematikers nicht durch zu mühsame und *einförmige* Anstrengungen, dergleichen die Beschäftigung mit lauter endlichen Gröſsen erfordert, endlich ermüdet und abgestumpft, sondern sein Genie durch einen freyen Aufschwung auf der einen Seite bis zur Meſskunst des Unendlichgroſsen, und auf der andern in die unermeſslichen Gefilde der erhabensten und nützlichsten Dichtungen auf die angenehmste Weise zu immer höheren Erfindungen belebet werden.

A n h a n g

ü b e r

Tangente und Secante des rechten Winkels.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, eine Untersuchung beyzufügen, die gerade hier an ihrem rechten Orte stehen dürfte. Der auch im hohen Alter der Mathematik noch immer zu frühe entrissene *Kästner* sucht in einem kurzen Aufsatze über *Summe und Unterschied von Tangente und Secante, im sechsten Heft des Archivs der reinen und angewandten Mathematik*, 1797. S. 174—180. zu beweisen, daſs ein offenbarer Widerspruch entstehen würde, wenn man die allgemeinen Gleichungen für die Tangenten und Secanten der Winkel auch auf den *rechten* Winkel, wo sie unendlich werden, anwenden wollte. Er führt folgende acht Gleichungen an:

1) $\sec.\varphi + \tan g.\varphi = \frac{1+\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$

2) $\sec.\varphi - \text{tang.}\varphi = \text{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$

3) $2\sec.\varphi = \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + \text{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$

4) $2\,\text{tang.}\varphi = \text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) - \text{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)$

5) $\frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{\sec.\varphi} = 1 + \sin.\varphi$

6) $\frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{\text{tang.}\varphi} = \frac{1}{\sin.\varphi} + 1$

7) $\frac{\text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sec.\varphi} = 1 - \sin.\varphi$

8) $\frac{\text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\text{tang.}\varphi} = \frac{1}{\sin.\varphi} - 1$

Setzt man also $\phi = 90°$; so ist, nach 1, sec. 90° + tang. 90° = tang. 90°, so zu schliefsen aber verbiete, sagt er, die Gleichung 6, weil sonst nach dieser $\frac{\text{tang. } 90°}{\text{tang. } 90°} = \frac{1}{\text{sin. } 90} + 1$, also 1 = 2 seyn würde.

(Diesen Widerspruch hätte er auch schon geradezu aus 1 folgern können, indem nach 1, $\frac{\text{sec. } 90° + \text{tang. } 90°}{\text{tang. } 90°} = 1$, also, da sec. 90° = tang. 90° ist, 2 = 1 seyn müfste). Hieraus schliefst er also, dafs die Secante und Tangente des rechten Winkels nicht Etwas *Wirkliches*, sondern *Nichts* sey, und daher die Gleichung sec. 90° + tang. 90° = tang. 90° in Worte übersetzt nichts weiter sage, als: Ein Nichts und ein ander Nichts sind zusammen weder mehr, noch weniger, als das andere Nichts allein.

In der That kann wohl kein Widerspruch *scheinbarer* seyn, als der hier gefolgerte, und wenn man Tangente und Secante des rechten Winkels für *Nichts* erklärt; so scheint derselbe zwar gehoben zu seyn, und die Sache nichts weiter auf sich zu haben, als dafs man künftig nicht mehr die *Namen*: Tangente und Secante des rechten Winkels gebrauche. Allein die Sache ist wichtiger, als es anfänglich scheint. Denn nun würde folgen, dafs eine allgemeine Gleichung für endliche Gröfsen ihre Anwendung gänzlich verlieren könne, sobald man dieselben unendlich grofs setzt. Wäre aber dieses möglich; so wäre der ganze Calcul des Unendlichgrofsen unsicher, und daher unbrauchbar — eine Behauptung, welcher doch wohl kein Unbefangener beypflichten wird! Mir wenigstens ist es gerade einer der erhabensten Vorzüge der Mathematik, dafs die Allgemeinheit der Gleichungen, die sie für die endlichen Gröfsen richtig herleitet, so unbeschränkt ist, dafs sie eben so richtig bleiben, man mag diese Gröfsen = o, oder = ∞ setzen, und es ist daher bey allen sehr verwickelten Gleichungen jedesmal meine erste Probe ihrer Richtigkeit, dafs ich die darinn enthaltenen Gröfsen = o, oder = ∞ setze. Sind die Gleichungen hier nicht richtig; so ist ihre Unrichtigkeit überhaupt unmittelbar entschieden. Es läfst sich also schon hieraus schliefsen, dafs sowohl der obige Widerspruch selbst, als auch

die Art, wie *Kästner* ihn zu heben meynt, auf bloſsen Miſsverständnissen beruhen muſs, und dieses wird sich bey näherer Beleuchtung deutlich und unwidersprechlich zeigen.

1) Was versteht *Kästner* hier unter dem Worte *Nichts?* Ein *privatives Nichts*, d. i. einen Mangel der Gröſse, oder *Null* kann es nicht bedeuten. Denn sonst würde dieses so viel sagen: Die Tangenten und Secanten der Winkel *wachsen* immer stärker, je mehr diese sich dem rechten nähern, und zwar so, daſs wenn sie letztern als ihre Grenze wirklich erreichen, sie gerade *bis Null gewachsen* sind. Und so ist offenbar, daſs die Gleichung sec. 90° + tang. 90° = tang. 90° auf keine Weise so ausgelegt werden kann: $0 + 0 = 0$, und sie in der Art auszulegen, hat sich *Kästner* auch sehr gehütet. Bedeutet aber das Nichts hier nicht ein *privatives*; so bleibt nichts übrig, als daſs es ein *negatives*, d. i. ein *Unding*, d. i. seinen *widersprechenden* Begriff, oder etwas bloſs Imaginaires, wie z. B. $\sqrt{-1}$ bedeuten müſste. Dann aber ist die Gleichung 1 für $\varphi = 90^\circ$ offenbar falsch, denn ein Unding und ein ander Unding sind zusammen nicht dem andern Undinge gleich, sondern es sind *zwey* Undinge, z. B es ist nicht $\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, sondern $= 2\sqrt{-1}$. Also wird durch die *Kästnerische* Übersetzung in Worte der vermeynte Widerspruch nicht im mindesten gehoben.

2) Aus welchem Grunde aber ist man wohl befugt, die Tangente und Secante des rechten Winkels für ein negatives Nichts, d. i. für einen widersprechenden Begriff zu halten? Offenbar müſste also dieser Widerspruch in ihrer *Definition* liegen, welche *gewöhnlich* fordert, daſs beyde Linien einander schneiden. Da nun beym rechten Winkel kein Schneiden für sie statt findet; so sind nach *dieser* Definition Tangente und Secante des rechten Winkels allerdings *widersprechende* Begriffe, d. i. bloſs *imaginaire* Gröſsen, und daher im eigentlichen Sinne *Undinge*. Allein was zwingt denn den Geometer, gedachte Definitionen so einzuschränken, daſs durchaus ein Schneiden nöthig sey? Ist denn das *Aufhören* zu schneiden, d. i. der Parallelismus der Linien ein Widerspruch? Was soll ihn also abhalten, die Definition der Tangente und Secante so zu erweitern, daſs sie für alle

mögliche Winkel gilt, nämlich so: wenn die in dem einen Endpunkte des Kreisbogens ihn berührende Linie, und der im andern Endpunkt ihn schneidende Halbmesser einander schneiden, oder zu schneiden aufhören; so nennt man diese Linien Tangente und Secante des Bogens und seines Centriwinkels? Hat nicht unter andern Herr Professor *Klügel* in seiner analytischen Trigonometrie diese Definition in der That so erweitert, daſs sie auch für den rechten Winkel gilt? wenn er tang. φ durch $\frac{\text{sin. } \varphi}{\text{cos. } \varphi}$, und sec. φ durch $\frac{1}{\text{cos. } \varphi}$, mithin tang. φ und sec. φ durch $\frac{1}{0} = \infty$ definirt? Sind nicht die Definitionen in der Mathematik ganz willkührlich? Muſs es nicht bloſs die *Construction* entscheiden, ob das Definirte möglich oder unmöglich ist?

Wäre gedachte Erweiterung der Definition nicht zulässig; so könnte letztere weit weniger für den Winkel = o gelten, weil hier die Secante sich in den Halbmesser, und die Tangente in seinen Endpunkt verwandelt, mithin der Halbmesser *sich selbst* in seinem *Endpunkt* schneiden müſste, und doch nimmt *Kästner* (18.) die beyden letzten Begriffe als richtig an. Für den Winkel = o erklärt er also die Erweiterung der Definition für zulässig. Was kann ihn demnach berechtigen, sie für den rechten Winkel für unzulässig zu erklären? Doch hiezu hält er sich deswegen befugt, weil zwar ein Winkel = o, das ist, *kein* Winkel auch eigentlich keine Sekante habe, aber wenn man den Winkel so klein werden lasse, als man will, seine Secante dem Sinustotus so nahe komme, als man will, mithin des abnehmenden Winkels Secante eine Grenze habe, die man angeben, mithin als erreicht ansehen könne. In dieser Bedeutung nenne man die Secante = 1 für den Winkel = o, aber des bis zum rechten wachsenden Winkels Secante habe keine Grenze, die sich angeben lieſse, das sage das Wort: Unendlich. „Allein

a) sagt letzteres nicht offenbar so viel: die Tangente und Secante des bis zum rechten wachsenden Winkels schneiden sich in einem Punkte, der immer weiter fortrückt, bis sie beym rechten Winkel parallel, und daher unendlich werden. Ist also hier nicht ebenfalls eine Grenze, die sich angeben läſst, nämlich: der *Parallelismus* der

beyden Linien, und die *Unendlichkeit* ihrer Gröſse, und die man beym rechten Winkel ebenfalls als erreicht ansehen kann?

b) Dieses ganze Raisonnement trägt zur Hebung des Widerspruchs, weder in der Benennung sec. 0, noch sec. 90° nicht das Mindeste bey. Denn wofern die Definition durchaus den Durchschnitt der Tangente und Secante erforderte; so wäre der Begriff sec. 0 nicht nur eben so widersprechend, als der sec. 90°, sondern jener wäre es in noch höherem Grade, als dieser, weil beym letztern die einander bestimmenden Linien noch da sind, und bloſs parallel werden, beym erstern aber die eine, die die andere bestimmen soll, nicht einmahl mehr da ist, und daher, wie schon gezeigt worden, die Secante hier eine Linie seyn soll, die sich selbst bestimmt, und zwar dadurch, daſs sie sich in ihrem Endpunkt schneidet.

3) Da also die Tangente und Secante des rechten Winkels kein Nichts, sondern ein wirkliches, und zwar unendlichgroſses Etwas ist; so ist hieraus die Grundlosigkeit der Behauptung, daſs die Gleichung (1.) auf den rechten Winkel nicht anwendbar sey, schon von selbst klar. *Kästner* führt zwar noch zwey Gründe an, um ihr einigen Schein zu geben. Der erste, den er (20. 21.) anführt, ist dieser: „Das Verhalten zwischen Gröſsen bleibe nach seinem Gesetze zwar im *Aufhören*, *Verschwinden* und Unendlich *werden*, aber wenn sie *aufgehört haben*, lasse sich aus denselben nichts schlieſsen. So bleibe im rechtwinklichten Dreyeck, in welchem ein Winkel = 30° ist, das Verhältniſs der Hypotenuse, des Katheten, der dem Winkel gegenüber ist und der Grundlinie immerfort wie 1, $\frac{1}{2}$ und 0,866 beym Abnehmen der Seiten bis *an* den Scheitel des Winkels, aber *im* Scheitel selbst seyn nicht etwa drey Punkte, die sich eben so verhalten.“ Allein ohne daran zu denken, daſs dieser Grund die Tangente und Secante des rechten Winkels, als wahre Gröſsen, gar nicht angeht, so ist die ganze Distinction zwischen Aufhören und Aufgehört haben u. s. w. nichts weiter als eine Spitzfündigkeit, mit welcher sich kein verständlicher Begriff verbinden läſst, und welcher, wie ich in der Abhandlung über das Fundament der Differentialrechnung gezeigt habe, letztere mehr verwirrt, als aufklärt. Denn was kann

sonderbarer seyn, als zwischen *Aufhören* und *Aufgehört haben* sich einen *Zwischenraum*, oder eine *Zwischenzeit* zu denken, da doch das Aufhören nichts anders, als die *Grenze* der Gröſse bedeutet, diese aber bey der Linie ein *Punkt*, und bey der Zeit ein *Moment* ist. Sollte also eine Linie in dem Punkt, wo sie *aufhört*, noch nicht *aufgehört haben*; so müſste man entweder den Punkt, in welchem sie aufhört, als *theilbar* denken, oder man müſste zu demselben noch einen andern vom vorigen unterschiedenen hinzudenken, in welchen sie noch fortrücken muſs, wenn man sagen will: nun *hat* sie aufgehört. Da aber zwischen zwey verschiedenen Punkten allemal eine Linie ist; so würde man sich selbst widersprechen, wenn man sagen wollte: die Linie *hört* schon im *ersten* Punkte *auf*, sondern ihr *Aufhören* könnte erst in den *zweyten* Punkt fallen, in welchem sie schon aufgehört hat. Und so ist Aufhören und Aufgehört haben, ganz einerley. Eine Linie, deren Wachsen oder Abnehmen in einem Punkte *aufhört*, *hat* in demselben schon wirklich zu wachsen, oder abzunehmen, *aufgehört*. Eben so ist es auch mit der Zeit beschaffen. In demselben Moment, in welchem der Tag *aufhört*, ist er auch *vorbey*, und *hat* also schon *aufgehört*. Aus diesem Grunde hat auch das Beyspiel vom rechtwinklichten Dreyeck keinen Sinn. Denn wenn man sagt: das Dreyeck *hört* beym Abnehmen der Seiten, *am* Scheitel des Winkels erst *auf*, aber *im* Scheitel *habe* es schon *aufgehört*, was läſst sich hier für ein Unterschied zwischen den Wörtern *am* und *im* Scheitel denken? Rücken die drey Seiten *in* den Scheitel; so *hat* das Dreyeck allerdings schon *aufgehört*, aber es kann auch nicht eher *aufhören*, als bis sie *in* denselben schon wirklich gerückt sind. Sich also im Scheitel drey Punkte zu denken, die sich eben so verhalten, wie die Seiten des Dreyecks, wäre allerdings ungereimt, und wer sich z. B. so was unter dem sogenanten *charakterischen Dreyeck* in der Differentialrechnung denken wollte, würde freylich Mitleid verdienen. Wer ihm aber belehren wollte, er müſse sich zwey von diesen drey Punkten nicht *im*, sondern *am* Scheitel, und so das Dreyeck nur als *aufhörend*, nicht aber als *aufgehört* denken, würde seine Einsicht doch wohl sehr wenig verbessern. Soll das Verhältniſs der Seiten des Dreyecks auch beym *aufhörenden* statt finden; so ist dieses auf keine andere Weise möglich, als daſs man die Seiten desselben, ob sie gleich

in der That bloſse Punkte, oder richtiger, ein und eben derselbe Punkt sind, als wirkliche Linien betrachtet, und sich also dieselben als *unendlichvielste* Theile der Seiten des gegebenen Dreyecks nicht *denkt*, sondern bloſs *imaginirt*. Hierauf beruht, wie ich in der sechsten Abhandlung gezeigt habe, die ganze Differentialrechnung, und dieses ist auch der wahre und einzige Grund, aus welchem der Geometer berechtigt ist, die Definition der trigonometrischen Linien auch auf den Winkel $=$ 0 anzuwenden. nämlich wenn er sich den Winkel 0 als den unendlichvielsten Theil des rechten Winkels imaginirt; so wird sein Sinus der unendlichvielste Theil des Sinustotus, folglich bleibt hier die Vorstellung *aller drey Seiten* des Dreyecks, mithin des *Dreyecks* selbst, und da cos. $0^\circ =$ sin. $90^\circ = 1$ ist; so bedeuten die Gleichungen sin. $0^\circ = 0$, und cos. $0^\circ = 1$ so viel: sin. $\frac{90^\circ}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, und cos. $\frac{90^\circ}{\infty} = 1$. Da nun ferner tang. $= \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$, und sec. $= \frac{1}{\text{cos.}}$; so bedeuten die Gleichungen tang. $0^\circ = 0$, und sec. $0^\circ = 1$ so viel: tang. $\frac{90^\circ}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, und sec. $\frac{90^\circ}{\infty} = 1$.

Der *zweyte* Grund, woher *Kästner die* Gleichung sec. $\varphi +$ tang. φ $=$ tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ auf $\varphi = 90^\circ$ nicht anwendbar hält, ist dieser: „weil, so lange φ kein rechter Winkel ist, die Gleichung sich *construiren* lasse, indem man die Secante nur auf die Verlängerung der Tangente vom Durchschnittspunkte an auftragen dürfe. Nur bey $\varphi = 90^\circ$ gebe es keinen Durchschnitt, also finde da die Construction nicht statt. Dieser Grund hat viel Schein. Denn ich habe oben selbst gesagt, daſs die Definitionen in der Mathematik an sich willkührlich sind, weil bloſs die Construction entscheiden muſs, ob das Definirte was Mögliches oder Unmögliches, und bloſs Imaginaires ist. Fände also die Construction der obigen Gleichung für $\varphi = 90^\circ$ nicht statt; so wäre es entschieden, daſs die Tangente und Secante des rechten Winkels etwas Unmögliches und bloſs Imaginaires wäre, wie z. B. $\sqrt{-1}$. Allein diese Construction findet auch hier in der That statt, wenn man die Secante nicht, wie es *Kästner* macht, *vom Durch-*

schnitte an auf die *Verlängerung* der Tangente, sondern *vom Anfangspunkt* der letztern *an* auf ihre *entgegengesetzte* Verlängerung trägt, denn hier nähert sich die Summe tang. φ + sec. φ der Gröfse 2 tang. φ immer mehr, je mehr sich φ dem rechten Winkel nähert, bis sie endlich bey diesem vollkommen = 2 tang. φ, d. i. = sec. φ + tang. φ wird, weil hier sec. φ = tang. φ ist. Dafs man aber allerdings berechtigt ist, die Secante von φ eben sowohl auf die *negative* Seite der Tangente, als auf die positive aufzutragen, ist an sich klar, weil die Gleichung sec. φ + tang. φ = tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ blofs die *Gröfse* der Summe beyder Linien bestimmt, ohne die mindeste Rücksicht auf ihre *Lage* zu nehmen.

4) Läfst sich aber die eben angeführte Gleichung auch für $\varphi = 90^\circ$ genau construiren; so ist von selbst klar, dafs aus ihr auch für diesen Werth von φ eben so wenig ein *wahrer* Widerspruch entstehen kann, als für jeden andern Werth von φ, und dafs also der *Schlufs*, durch welchen *Kästner* den Widerspruch folgert, durchaus *fehlerhaft* seyn mufs. Und dieses läfst sich auch ohne Mühe zeigen. Denn für $\varphi = 90^\circ$ verwandelt sich die Gleichung (1.) in diese tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}90^\circ)$ = sec. 90° + tang. $90^\circ = \infty + \infty = 2\,\infty$, und eben das sagt auch die Gleichung (4.) 2 tang. 90° = tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}90^\circ)$ — tang. $(45^\circ - \frac{1}{2}90^\circ)$, nämlich tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}90^\circ) = 2$ tang. $90^\circ = 2\,\infty$. Nun ist vermöge der Gleichung (6.), aus welcher *Kästner* den Widerspruch folgert, $\frac{\text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}90^\circ)}{\text{tang.}\,90^\circ} = \frac{1}{\sin.\,90^\circ} + 1$, folglich, vermöge der Gleichungen (1.6) $\frac{2.\,\infty}{\infty} = 1 + 1$, also $2 = 2$, und nicht, wie *Kästner* schliefst: $1 = 2$. So beruht der ganze, so viel Aufsehen machende *Widerspruch* blofs auf einem offenbar *falschen* Schlufse! Ich würde daher denselben schon gleich zu Anfange aufgedeckt haben, wenn es mir nicht nöthig geschienen hätte, auch die übrigen falschen Schlüfse, zu welchen derselbe Anlafs gegeben hätte, aufzudecken, und so die Sache in ihr völliges Licht zu setzen.

Übrigens ist zu merken, dafs eben die Gleichung (1.4) tang. $(45^\circ + \frac{1}{2}90^\circ) = 2\,\infty$ auch aus der bekannten allgemeinern:

$$\text{tang.}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang.}\,\alpha+\text{tang.}\,\beta}{1-\text{tang.}\,\alpha\,.\,\text{tang.}\,\beta}$$ folgt,

welche für $\alpha=45^\circ$ und $\beta=\frac{1}{2}\varphi$ diese giebt:

$$\text{tang.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi)=\frac{1+\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi}{1-\text{tang.}\,45^\circ.\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi},$$ also für

$\varphi=90^\circ$ diese: $\text{tang.}\,(45^\circ+\frac{1}{2}90^\circ)=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}=2\,\infty.$

Diese Gleichung hat für tang. 90° noch das Vorzügliche, dafs in ihre Bestimmung blofs der Sinustotus und tang. 45° einen Einflufs hat, ohne dafs darinn tang. 90° von neuem vorkommt.

5) Die ganze Schwierigkeit, die hier übrig bleibt, betrift also lediglich die Frage: wie kann die aus der *Gleichung* hergeleitete Tangente des rechten Winkels zweymal so grofs seyn, als diejenige, die aus der *Definition* der Tangente zu folgen scheint? Da die Folgerung aus der erstern erwiesen richtig ist, so mufs die aus der letztern unrichtig seyn. Und so ist es wirklich. Denn vermöge der Definition werden die Tangente und Secante vom Halbmesser an bis zu ihrem *Durchschnittspunkt*, oder bis dahin bestimmt, wo dieser *aufhört*. Nun giebt es für jeden Winkel, der nicht ein rechter ist, nur *einen* Durchschnittspunkt, weil hier die Linien nach der entgegengesetzten Seite *aus einander fahren*, mithin kann hier die Tangente und Secante des *spitzen* Winkels nur auf derjenigen Seite des Halbmessers gedacht werden, auf welcher der Winkel liegt, und die des *stumpfen* Winkels nur auf der entgegengesetzten, und zwar so, dafs sie sich dem *Aufhören*, einander zu schneiden, auf beyden Seiten *gleichstark* nähern, wenn der spitze und stumpfe Winkel sich beyde dem rechten *gleichstark* nähern,

und wenn jeder von diesen dem rechten *gleich* wird, das *Aufhören*, einander zu schneiden, auf *beyden* Seiten zugleich und in demselben Moment erfolgt. Also giebt es für die Tangente und Secante des *rechten* Winkels auf *jeder* Seite ein Aufhören des Schneidens, mithin müssen sie, nach der Definition, vom Halbmesser an nicht nur nach der einen Seite, auf welcher der rechte Winkel liegt, (wie man sich dieselben gewöhnlich vorstellt) sondern zugleich nach der entgegengesetzten bis zum Aufhören des Schneidens, d. i. als nach *beyden* Seiten ohne Ende fortgehend gedacht werden. Also ist die wahre vollständige Tangente und Secante des rechten Winkels nicht nur nach den obigen *Gleichungen*, sondern auch nach ihrer richtig verstandenen *Definition* zweymal so grofs, als die gewöhnlich dafür angenommene, und zwar genau nach derjenigen Vorstellung, welche die obige *Construction* der Gleichung (1) giebt.

So fordert es auch durchaus das Gesetz der *Stetigkeit*. Denn der *rechte* Winkel ist die *gemeinschaftliche Grenze* der *spitzen* und *stumpfen* Winkel, *in* welcher jene *aufhören*, und diese *anfangen*, und eben so ist auch seine *Secante* und *Tangente* die *gemeinschaftliche Grenze* für die Secanten und Tangenten der *spitzen* und *stumpfen* Winkel, *in* welcher jene *aufhören*, und diese *anfangen*. Nun aber liegen jene auf der Seite des Winkels, und diese auf der entgegengesetzten Seite. Also mufs ihre *gemeinschaftliche* Grenze, als eine und ebendieselbe Linie, *auf beyden Seiten zugleich* liegen, d. i. nach *beyden* hin ohne Ende fortgehend gedacht werden. Gingen sie hingegen nur nach einer Seite fort; so müfsten sie sich, um von der Seite für die spitzen Winkel auf die entgegengesetzte Seite der stumpfen zu kommen, entweder in einem *untheilbaren Zeitpunkt* durch einen Winkel von 180° herumdrehen, oder *ohne Drehung* durch einen *Sprung* von der einen Seite auf die andere

kommen. Das erstere aber ist wider den Begriff der *Bewegung*, und das andere wider das Gesetz der *Stetigkeit*.

Eben die Gleichung sec. $90° +$ tang. $90° =$ tang. $90°$, welche der offenbarste Widerspruch zu seyn schien, ist es also, die uns vielmehr erst auf den *eigentlichen Begriff* der Tangente und Secante des rechten Winkels führt, und uns lehrt, dafs die gewöhnlich dafür angenommene, wie sie auf der *linken* Seite der Gleichung vorkommt, nur die *Hälfte* von der wahren vollständigen ist, welche die zur rechten Seite anzeigt. Wollte man sagen: auch die auf der linken Seite der Gleichung vorkommende müfste, so wie auch die Secante die vollständige $= 2\,\infty$ bedeuten; so brächte man freylich den neuen Widerspruch heraus $2\,\infty + 2\,\infty = 2\,\infty$. Aber dafs diese Annahme falsch ist, lehrt die Gleichung selbst offenbar. Denn sie ist ein besonderer Fall der allgemeinen: sec. φ + tang. $\varphi =$ tang. $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, diese aber heifst eigentlich so viel: die im rechtwinklichten Dreyeck am Winkel φ liegende Hypotenuse a, und der ihm gegenüber liegende Kathetus b, die beyde *blofs nach einer* Seite, nämlich auf der Seite der Grundlinie liegen, auf welcher der Winkel φ liegt, sind zusammen $=$ tang. $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$. Wird daher sowohl a als b nach *dieser* Seite unendlich, nämlich $a = \infty$, und $b = \infty$; so wird $\infty + \infty =$ tang. $(45° + \frac{1}{2}\varphi)$. Allein wenn a, b nach einer Seite unendlich werden; so wird $\varphi = 90°$, also ist $\infty + \infty =$ tang. $90°$, d. i. wenn im rechtwinklichten Dreyeck die Hypotenuse und der Kathetus, der dem an ihr liegenden Winkel gegenüber steht, nach der Seite des Durchschnitts unendlich werden; so ist gerade so, wie für die spitzen und stumpfen Winkel, ihre Summe der *Tangente* des rechten Winkels gleich, also tang. $90° = 2\,\infty$. Eben dieses bestätigt auch die Gleichung

$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,90^\circ) = \frac{1 + \text{tang.}\,45^\circ}{1 - \text{tang.}\,45^\circ\,\text{tang.}\,45^\circ}$, in welcher zur *Rechten* tang. 90° *gar nicht vorkommt*, aufs einleuchtendste, indem diese die Gleichung $\text{tang.}\,90^\circ = \frac{1+1}{0} = 2\,\infty$ *unmittelbar* giebt. Und so zeigt auch selbst der *Kästnerische* Aufsatz, daſs auch die scheinbarsten Widersprüche, die man wider den Calcul des Unendlichen vorbringen mag, sicher auf bloſsen Miſsverständnissen ruhen, und nur zu seiner desto gröſsern Bestätigung dienen.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

L e i p z i g,

gedruckt in der Solbrigschen Buchdruckerey.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schultz, Johann

Entwickelung einiger mathematischer Theorien

Königsberg 1803

4 Math.u. 112
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525762-6